Estructura de Filtros

Ejemplos

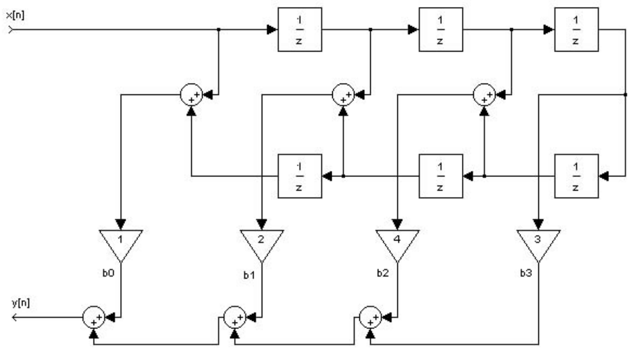
Ejemplos de cálculo

1. Filtros FIR.

1.1. Realizar una estructura que aproveche las condiciones de simetría dadas por la característica de fase lineal del filtro del ejercicio de cálculo 1.1. Comparar la cantidad de retardos, ganancias y sumadores necesarios en ambos casos.

$$h[n] = \{\underset{\uparrow}{1},2,4,3,4,2,1\}$$

Solución: El diagrama de bloques resultante muestra el ahorro de bloques de ganancia obtenido porque los coeficientes por los que se multiplica la señal de entrada son simétricos



Esta estructura requiere M-1 memorias y M-1 sumas como la implementación directa pero el número de multiplicaciones se reduce de M a (M+1)/2 para M impar (o a M/2 si M fuera par).

$$h[n] = \pm h[M-1-n] \Rightarrow h[0] = h[6] \quad ; \quad h[1] = h[5] \quad ; \quad h[2] = h[4] \quad ; \quad h[3] = h[3]$$

1.2. Obtener la estructura en celosía del filtro FIR representado por la función de transferencia siguiente

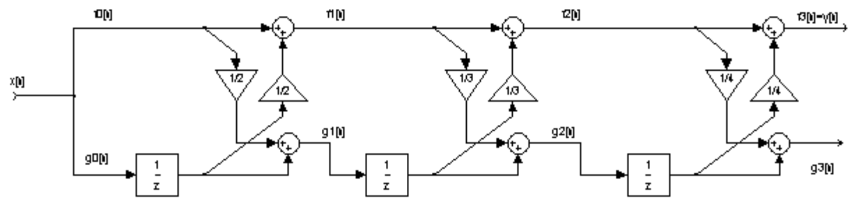
$$H(z) = 1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-3}$$

Solución: De los coeficientes para la forma directa se tienen los polinomios A(z) y B(z) y recursivamente se calculan los coeficientes de la celosía

$$A_3(z) = H(z) = 1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-3} \Rightarrow B_3(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} + z^{-3} \quad \wedge \quad K_3 = \alpha_3(3) = \frac{1}{4}$$

$$A_2(z) = \frac{A_3(z) - K_3 B_3(z)}{1 - K_3^2} = 1 + \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2} \Rightarrow B_2(z) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}z^{-1} + z^{-2} \quad \wedge \quad K_2 = \alpha_2(2) = \frac{1}{3}$$

$$A_1(z) = \frac{A_2(z) - K_2 B_2(z)}{1 - K_2^2} = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} \Rightarrow B_1(z) = \frac{1}{2} + z^{-1} \quad \wedge \quad K_1 = \alpha_1(2) = \frac{1}{2}$$



1.3. Obtener una estructura de subsistemas de segundo orden en cascada para el sistema dado por la siguiente transferencia

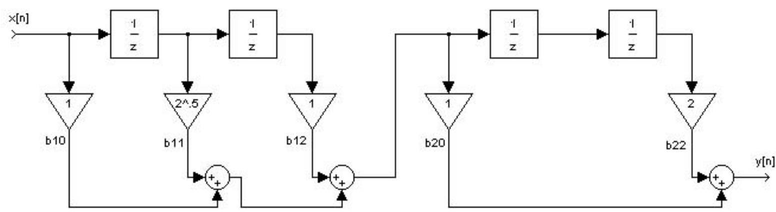
$$H(z) = 1 + \sqrt{2}z^{-1} + 3z^{-2} + 2\sqrt{2}z^{-3} + 2z^{-4}$$

Solución: Calculando las raíces, factorizando y agrupando en pares de factores

$$H_1(z) = \left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z^{-1}\right)\left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z^{-1}\right) = 1 + \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2} \Rightarrow b_{10} = 1 \quad b_{11} = \sqrt{2} \quad b_{12} = 1$$

$$H_2(z) = \left(1 - j\sqrt{2}z^{-1}\right)\left(1 + j\sqrt{2}z^{-1}\right) = 1 + 2z^{-2} \Rightarrow b_{20} = 1 \quad b_{21} = 0 \quad b_{22} = 2$$

El diagrama en bloques del sistema resultante es



Filtros IIR.

2.1. Deducir el caso general de la estructura de un sistema IIR en forma directa II a partir de la realización en la forma directa I.

Solución: La ecuación en diferencias expresada como una igualdad de dos sumatorias es

$$\sum_{k=0}^{N} \bar{a}_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} \bar{b}_k x[n-k] \overset{Z}{\leftrightarrow} \sum_{k=0}^{N} \bar{a}_k Y(z) z^{-k} = \sum_{k=0}^{M} \bar{b}_k X(z) z^{-k}$$

dividiendo todo por $\bar{a}_0$ y cambiando cada $a_k = \dfrac{\bar{a}_k}{\bar{a}_0}$

$$y[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \overset{Z}{\leftrightarrow} Y(z)\left(1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\right) = \sum_{k=0}^{M} b_k X(z) z^{-k}$$

calculando H(z)

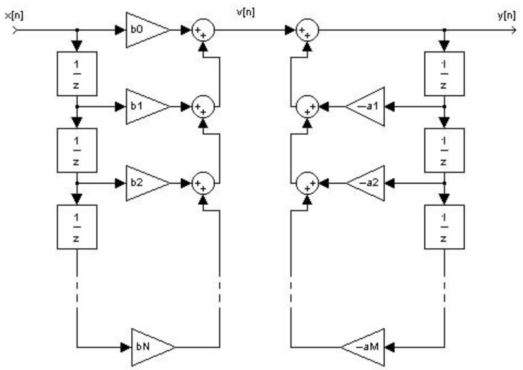
$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\left(1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\right)} = H_1(z)H_2(z) = N(z)\frac{1}{D(z)}$$

Considerando la transferencia H(z) como el producto de dos transferencias, $H_1(z)=N(z)$ y $H_2(z)=D^{-1}(z)$ equivale a un sistema formado por dos subsistemas en cascada. Dependiendo del orden en el que se dispongan los subsistemas, la señal intermedia es $v[n]=x[n]*h_1[n]$ o bien $w[n]=x[n]*h_2[n]$, y la salida es $y[n]=v[n]*h_2[n]$ o bien $y[n]=w[n]*h_1[n]$ respectivamente.

La implementación del filtro en la forma directa tipo I resulta inmediata de la aplicación de la ecuación en diferencias, tomando la variable intermedia v[n].

$$\begin{cases} V(z) = X(z)N(z) = X(z)\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k} \\ Y(z) = V(z)\dfrac{1}{D(z)} = \dfrac{V(z)}{1+\sum_{k=1}^{M} a_k z^{-k}} \end{cases}$$

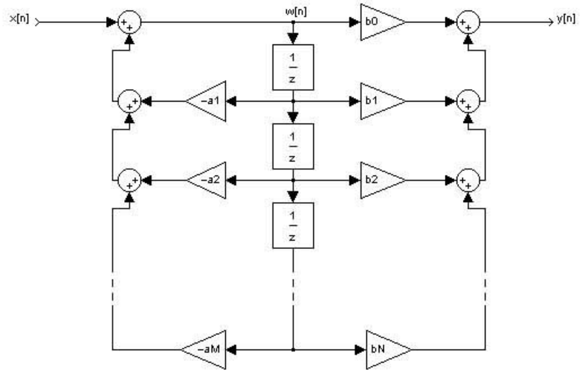
$$\Rightarrow \begin{cases} v[n] = \sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k] \\ y[n] = v[n] - \sum_{k=1}^{M} a_k y[n-k] \end{cases}$$



Reordenando los sistemas se obtiene la forma directa tipo II.

$$\begin{cases} W(z) = X(z)\dfrac{1}{D(z)} = \dfrac{X(z)}{1+\sum_{k=1}^{M} a_k z^{-k}} \\ Y(z) = W(z)N(z) = W(z)\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w[n] = x[n] - \sum_{k=1}^{M} a_k w[n-k] \\ y[n] = \sum_{k=0}^{N} b_k w[n-k] \end{cases}$$



2.2. Obtener una realización de subsistemas de segundo orden en cascada para el sistema representado por la transferencia siguiente

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1} + 2z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - z^{-1} + \frac{13}{16} z^{-2} - \frac{1}{2} z^{-3} + \frac{5}{32} z^{-4}}$$

Solución: La transferencia debe llevarse a la forma de producto de secciones de segundo orden en cascada

$$H(z) = \prod_{k=1}^{Ns} \frac{b_{k0} + b_{k1} z^{-1} + b_{k2} z^{-2}}{1 + a_{k1} z^{-1} + a_{k2} z^{-2}} = \prod_{k=1}^{Ns} H_k(z)$$

Calculando las raíces y factorizando

$$H(z) = \frac{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 - j\sqrt{2}z^{-1}\right)\left(1 + j\sqrt{2}z^{-1}\right)}{\left(1 - \left(\frac{1}{2} + j\frac{1}{4}\right)z^{-1}\right)\left(1 - \left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{4}\right)z^{-1}\right)\left(1 - j\frac{\sqrt{2}}{2}z^{-1}\right)\left(1 + j\frac{\sqrt{2}}{2}z^{-1}\right)}$$

Para conformar las secciones de segundo orden deben agruparse los factores tomando de a pares de raíces conjugadas del numerador y del denominador. Con los valores del ejemplo, pueden formarse dos subsistemas con transferencias $H_1(z)$ y $H_2(z)$. Para $H_1(z)$ podrían agruparse los siguientes factores

$$H_1(z) = \frac{\left(1 - j\sqrt{2}z^{-1}\right)\left(1 + j\sqrt{2}z^{-1}\right)}{\left(1 - \left(\frac{1}{2} + j\frac{1}{4}\right)z^{-1}\right)\left(1 - \left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{4}\right)z^{-1}\right)} = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{5}{16}z^{-2}}$$

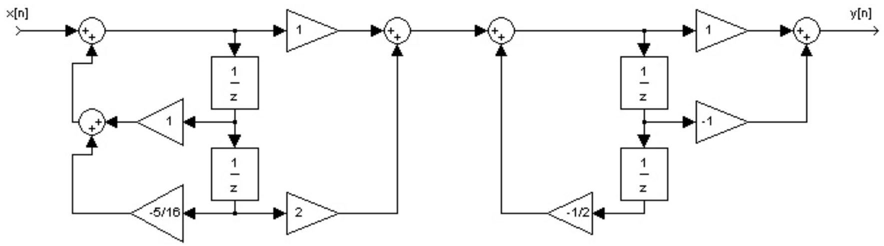
y con los factores restantes se conforma la otra sección $H_2(z)$

$$H_2(z) = \frac{\left(1 - z^{-1}\right)}{\left(1 - j\frac{\sqrt{2}}{2}z^{-1}\right)\left(1 + j\frac{\sqrt{2}}{2}z^{-1}\right)} = \frac{1 - z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

En virtud de lo anterior los coeficientes resultantes son

$$a_{11} = -1 \quad a_{12} = \frac{5}{6} \quad b_{10} = 1 \quad b_{11} = 0 \quad b_{12} = 2$$

$$a_{21} = 0 \quad a_{22} = \frac{1}{2} \quad b_{20} = 1 \quad b_{21} = -1 \quad b_{22} = 0$$



2.3. Obtener una estructura de subsistemas de primer orden en paralelo para el sistema representado por la transferencia siguiente

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{9}{16}z^{-2}}$$

Solución: La transferencia debe llevarse a la forma de suma de secciones de primer orden en paralelo

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N_p} \frac{b_{k0}}{1 + a_{k1}z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_s} c_{k1}z^{-k}$$

Calculando las raíces del denominador

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{3}{4}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{3}{4}z^{-1}\right)}$$

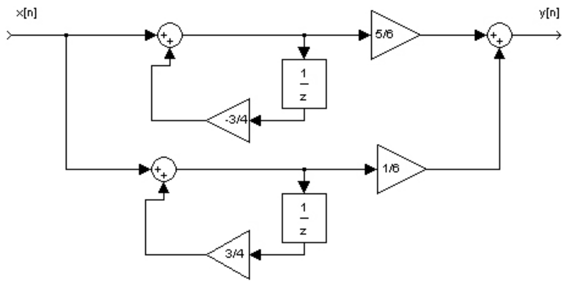
Expandiendo en fracciones parciales simples para conformar las secciones de primer orden en paralelo

$$H(z) = \frac{b_{10}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}} + \frac{b_{20}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{6}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}$$

En virtud de lo anterior los coeficientes resultantes son

$$a_{11} = \frac{3}{4} \quad b_{11} = \frac{5}{6}$$

$$a_{21} = -\frac{3}{4} \quad b_{21} = \frac{1}{6}$$



2.4. Obtener la estructura de secciones de segundo orden en paralelo del sistema representado por la transferencia

$$H(z)=\frac{1-\frac{7}{20}z^{-1}-\frac{9}{16}z^{-2}-\frac{63}{320}z^{-3}-\frac{81}{128}z^{-4}}{1-\frac{7}{4}z^{-1}+\frac{3}{2}z^{-2}-\frac{9}{16}z^{-3}}$$

Solución: La transferencia debe llevarse a la forma de suma de secciones en paralelo

$$H(z)=\sum_{k=1}^{Np}\frac{b_{k0}+b_{k1}z^{-1}+b_{k2}z^{-2}}{1+a_{k1}z^{-1}+a_{k2}z^{-2}}+\sum_{k=1}^{Ns}c_{k1}z^{-k}$$

Calculando las raíces y factorizando

$$H(z)=\frac{\left(1-\frac{5}{4}z^{-1}\right)\left(1+\frac{9}{10}z^{-1}\right)\left(1-j\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+j\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1-\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z^{-1}\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z^{-1}\right)\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)}$$

La transferencia tiene un par de polos complejos conjugados y un polo simple, por lo cual la estructura en paralelo debe tener una etapa de primer orden y otra de segundo orden. Además, como el numerador posee un orden mayor que el denominador, la expansión en fracciones parciales genera un término de orden uno, además de una constante. Haciendo la división polinómica del numerador y el denominador hasta obtener un resto de menor grado que el divisor se tiene

$$H(z)=\frac{9}{8}z^{-1}+\frac{67}{20}+\frac{-\frac{47}{20}+\frac{351}{80}z^{-1}-\frac{579}{160}z^{-2}}{1-\frac{7}{4}z^{-1}+\frac{3}{2}z^{-2}-\frac{9}{16}z^{-3}}$$

Expandiendo en fracciones parciales

$$H(z)=\frac{9}{8}z^{-1}+\frac{67}{20}+\frac{A}{1-\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z^{-1}}+\frac{A^{*}}{1-\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z^{-1}}+\frac{B}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}=$$

$$=\frac{9}{8}z^{-1}+\frac{67}{20}+\frac{\frac{7}{12}+\frac{227}{120}z^{-1}}{1-z^{-1}+\frac{3}{4}z^{-2}}+\frac{-\frac{44}{15}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}$$

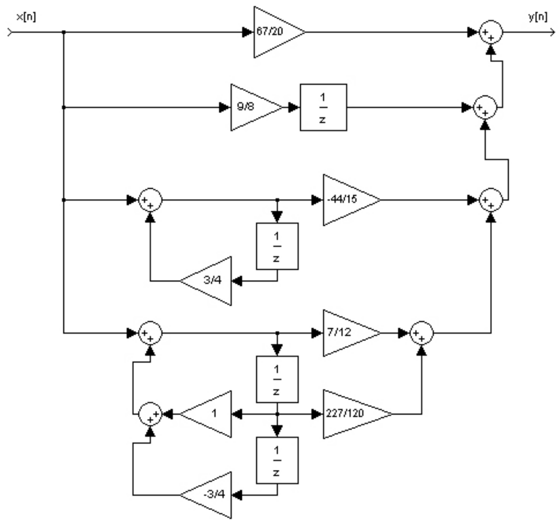
En virtud de lo anterior los coeficientes resultantes son

$$c_0=\frac{67}{20}$$

$$c_1=\frac{9}{8}$$

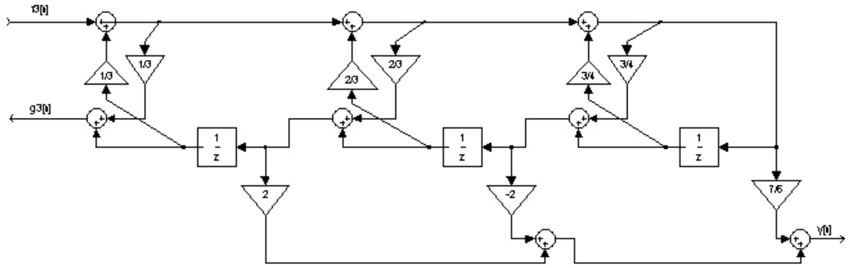
$$a_{11}=\frac{3}{4}\quad b_{10}=-\frac{44}{15}$$

$$a_{21}=1\quad a_{22}=-\frac{3}{4}\quad b_{20}=\frac{7}{12}\quad b_{21}=\frac{227}{120}$$



2.5. Obtener la estructura en celosía escalonada para el sistema representado por

$$H(z)=\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}+2z^{-2}}{1+\frac{53}{36}z^{-1}+\frac{13}{12}z^{-2}+\frac{1}{3}z^{-3}}$$



Solución: La transferencia del sistema puede expresarse como

$$H(z)=\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}+2z^{-2}}{1+\frac{53}{36}z^{-1}+\frac{13}{12}z^{-2}+\frac{1}{3}z^{-3}}=\frac{C_2(z)}{A_3(z)}$$

Al igual que en el caso de un sistema IIR todo polos se tienen los polinomios A(z) y B(z) y recursivamente se calculan los coeficientes de la celosía.

$$A_3(z)=H(z)=1+\frac{53}{36}z^{-1}+\frac{13}{12}z^{-2}+\frac{1}{3}z^{-3}\ \Rightarrow\ B_3(z)=\frac{1}{3}+\frac{13}{12}z^{-1}+\frac{53}{36}z^{-2}+z^{-3}\ \wedge\ K_3=\alpha_3(3)=\frac{1}{3}$$

$$A_2(z)=\frac{A_3(z)-K_3B_3(z)}{1-K_3^2}=1+\frac{5}{4}z^{-1}+\frac{2}{3}z^{-2}\ \Rightarrow\ B_2(z)=\frac{2}{3}+\frac{5}{4}z^{-1}+z^{-2}\ \wedge\ K_2=\alpha_2(2)=\frac{2}{3}$$

$$A_1(z)=\frac{A_2(z)-K_2B_2(z)}{1-K_2^2}=1+\frac{3}{4}z^{-1}\ \Rightarrow\ B_1(z)=\frac{3}{4}+z^{-1}\ \wedge\ K_1=\alpha_1(2)=\frac{3}{4}$$

Luego se calculan los coeficientes de la escalera.

$$C_2(z)=1+\frac{1}{2}z^{-1}+2z^{-2}\ \Rightarrow\ v_2=c_2(2)=2$$

$$C_1(z)=C_2(z)-v_2B_2(z)=-\frac{1}{3}-2z^{-1}\ \Rightarrow\ v_1=c_1(1)=-2$$

$$C_0(z)=C_1(z)-v_1B_1(z)=\frac{7}{6}\ \Rightarrow\ v_0=c_0(0)=\frac{7}{6}$$

Por lo tanto los coeficientes son

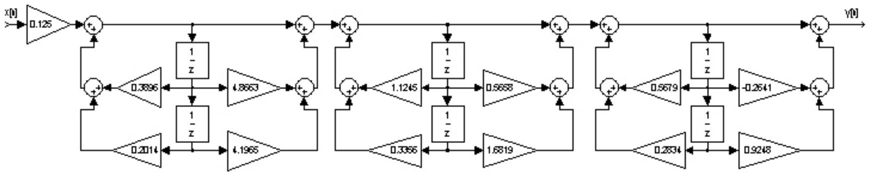
$$\mathrm{K}_3=\frac{1}{3}\ ;\ \mathrm{K}_2=\frac{2}{3}\ ;\ \mathrm{K}_1=\frac{3}{4}$$

$$\mathrm{v}_2=2\ ;\ \mathrm{v}_1=-2\ ;\ \mathrm{v}_0=\frac{7}{6}$$

Ejemplos de simulación

1. Transformación de estructuras.

1.1. Calcular los coeficientes de la estructura en la forma directa para un filtro realizado con secciones de segundo orden en cascada cuyos diagrama en bloques es



Solución:

```
%Ejercicio de Simulacion 6.1.
%Transformacion cascada a forma directa
clc,clear,close all

%Coeficientes de la estructura en cascada
sosc=[1.0000 4.8663 4.1965 1.0000 0.3896 0.2014;... %secciones
     1.0000 0.5658 1.6819 1.0000 1.1245 0.3356;...  %de 2do orden
     1.0000 0.5679 0.2834 1.0000 -0.2641 0.9248];   %en cascada
g=0.125; %ganancia

%Coeficientes de la forma directa
[b,a]=sos2tf(sosc,g); %transformacion de cociente de polinomios
                      %a productos de raices
```

1.2. Calcular los coeficientes de la estructura en la forma directa para un filtro realizado con secciones de segundo orden en paralelo cuya transferencia es

$$H(z) = 4 + \frac{-0.7424 - 0.1254z^{-1}}{1 - 0.2641z^{-1} + 0.9248z^{-2}} + \frac{-1.9805 - 1.4496z^{-1}}{1 + 1.1245z^{-1} + 0.3356z^{-2}} + \frac{-1.1522 - 0.3111z^{-1}}{1 + 0.3896z^{-1} + 0.2014z^{-2}}$$

Solución:

```
%Ejercicio de Simulacion 6.2.
%Transformacion paralelo a forma directa
clc,clear,close all

%Coeficientes de la estructura en paralelo
sosp=[-0.7424 -0.1254 0 1.0000 -0.2641 0.9248;... %secc 2do orden
    -1.9805 -1.4496 0 1.0000 1.1245 0.3356;...    %en paralelo
    -1.1522 -0.3111 0 1.0000 0.3896 0.2014];
d=4; %termino directo

%Coeficientes de la forma directa
[r1,q1]=residuez(sosp(1,1:3),sosp(1,4:6)); %expansion en fracciones
[r2,q2]=residuez(sosp(2,1:3),sosp(2,4:6)); %parciales de las secc
[r3,q3]=residuez(sosp(3,1:3),sosp(3,4:6)); %de 2do orden en paralelo
r=[r1 r2 r3]; %residuos
q=[q1 q2 q3]; %polos
[b,a]=residuez(r,q,d); %transformacion de fracciones parciales
                       %a funcion de transferencia
```

1.3. Calcular los coeficientes de la estructura en la forma directa para un filtro realizado en celosía cuyos coeficientes son

k_0=0.1901; k_1=0.5537; k_2=0.7591; k_3=0.5226; k_4=0.2353; k_5=0.0325
v_0=-0.056; v_1=-0.575; v_2=-0.518; v_3=-0.031; v_4=0.8676; v_5=0.5625; v_6=0.25

Solución:

```
%Ejercicio de Simulacion 6.3.
%Transformacion celosia escalonada a forma directa
clc,clear,close all

%Coeficientes de la estructura en celosia escalonada
k=[0.1901 0.5537 0.7591 0.5226 0.2353 0.0625]; %coef de celosia
v=[-0.056 -0.575 -0.518 -0.031 0.8676 0.5625 0.25]; %coef de escalera

%Coeficientes de la forma directa
[b,a]=latc2tf(k,v); %transformacion de coeficientes de reflexion
                    %a cociente de polinomios
```