

4

# estructura de filtros

resumen, ejemplos y ejercicios



# Estructura de Filtros

## Resumen

### Resumen para ejercicios de cálculo

#### 1. Diagrama de bloques.

La estructura de un filtro es la forma en la que se organiza su implementación. Dicha organización queda definida por los elementos de *software* o *hardware* que se usan para realizar el filtro y la manera en que se vinculan entre sí dichos elementos. Los elementos básicos que se necesitan para realizar un filtro son

- ★ bloques de ganancia que realizan el producto de una muestra por un escalar,
- ★ bloques sumadores que ejecutan la adición del valor de dos muestras,
- ★ bloques de retardo que permiten el almacenamiento en memoria de una muestra para ser presentada en un instante posterior,

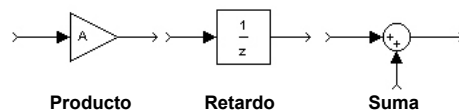


Figura 1: Diagrama de los bloques básicos

Comparativamente, puede analizarse que las diferentes estructuras presentan ventajas y desventajas en relación a la complejidad computacional o recursos que usan (sumadores, multiplicadores y memorias), a los efectos de longitud de palabra finita y otras características como tiempo de procesamiento por paralelización o tubería.

La manera en que se vinculan los elementos de un filtro pueden resumirse en

- ★ paralelo, donde la salida es la adición de las salidas de bloques con una entrada común y la transferencia total es la suma de la transferencia de los bloques
- ★ cascada, donde la entrada de un bloque es salida de otro y la transferencia total es el producto de las transferencias de los bloques
- ★ otras, como realimentación, celosía, etc.

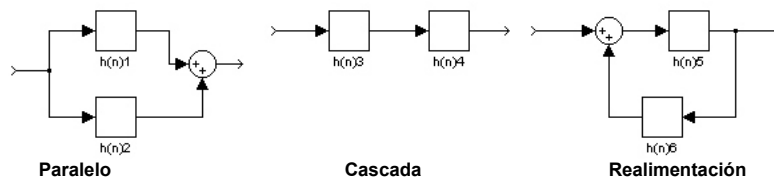


Figura 2: Conexiones elementales

#### 2. Estructura en forma directa.

La ecuación en diferencias de un filtro digital en el caso más general es

$$\sum_{k=0}^N \bar{a}_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M \bar{b}_k x[n-k]$$

Esto expresa que la suma de las entradas  $x[n]$  evaluadas en cada instante  $k$  y ponderadas por una ganancia  $\bar{b}_k$ , es igual a la suma de las salidas  $y[n]$  evaluadas en cada instante  $k$  y ponderadas por una ganancia  $\bar{a}_k$ .

Dividiendo todo por  $\bar{a}_0$  y despejando  $y[n]$  se tiene la ecuación en diferencias normalizada y mediante su transformada  $z$ , la transferencia

$$y[n] = \sum_{k=0}^M \bar{b}_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N \bar{a}_k y[n-k] \rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M \bar{b}_k z^{-k}}{\left(1 + \sum_{k=1}^N \bar{a}_k z^{-k}\right)}$$

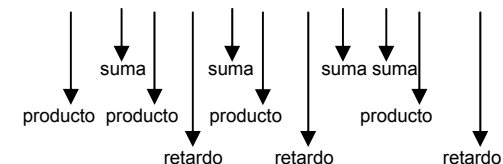
El diagrama de bloques de la estructura en la forma directa se realiza implementando cada retardo  $z^{-1}$  mediante un registro de memoria donde se van guardando las muestras de las señales de entrada o salida, cada ganancia con un bloque que realiza el producto del valor de una muestra de señal por un escalar  $b_k$  o  $a_k$  guardado en otro registro, y cada adición por un bloque sumador de las muestras de las señales guardadas en dos registros.

En los filtros FIR, se tiene que  $a_0=1$  y  $a_k=0$  para  $k=1;2;\dots$ . Siendo que  $a_0=1$ , la ecuación en diferencias, y la transferencia son de la forma

$$y[n] = \sum_{k=0}^M \bar{b}_k x[n-k] \rightarrow H(z) = \sum_{k=0}^M \bar{b}_k z^{-k}$$

Desarrollando la sumatoria de la ecuación en diferencias, puede verse claramente la forma de implementación directa de dicho filtro.

$$y[n] = \sum_{k=0}^M \bar{b}_k x[n-k] = \bar{b}_0 x[n] + \bar{b}_1 x[n-1] + \bar{b}_2 x[n-2] + \dots + \bar{b}_M x[n-M-1]$$



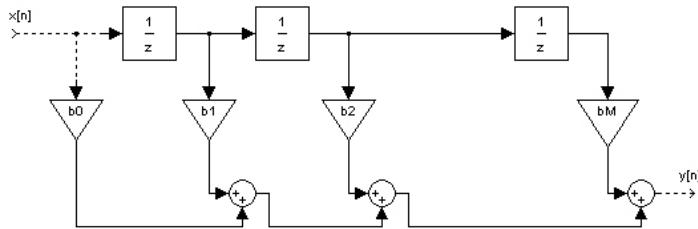


Figura 3: Estructura en la forma directa de un filtro FIR.

La implementación en la forma directa de un filtro FIR requiere  $M+1$  productos,  $M$  sumas y  $M$  retardos.

Cuando el filtro FIR tiene fase lineal, se puede demostrar que su respuesta al impulso es simétrica, o lo que es equivalente, los coeficientes de su transferencia son simétricos o antisimétricos

$$h[n] = \pm h[M - n] \rightarrow y[n] = \sum_{k=0}^K b_k (x[n - k] + x[n - (M - k)])$$

Esto implica que el primer bloque y el último bloque de producto, tienen la misma ganancia (amén de un cambio de signo en el caso antisimétrico). Por esto, puede aprovecharse la simetría y en lugar de usar  $M+1$  bloques de ganancia, alcanza con  $(M+1)/2$  bloques si  $M$  es impar, o  $M/2+1$  si  $M$  es par.

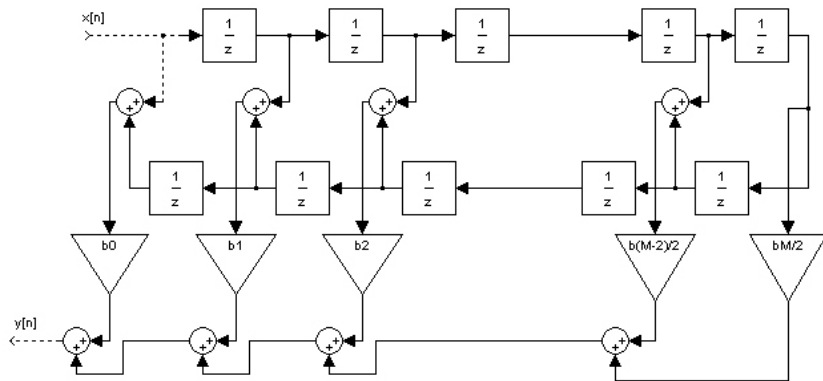


Figura 4: Estructura en la forma directa de un filtro FIR aprovechando la simetría de fase lineal.

En el caso de los filtros IIR, donde existe al menos algún  $a_k$  no nulo para  $k=1; 2; \dots; N$ , la transferencia es el cociente entre dos polinomios. Llamando  $N(z)$  al polinomio numerador y  $D(z)$  al denominador,  $H(z)$  puede escribirse como el producto de  $N(z)$  por el inverso de  $D(z)$

$$H(z) = N(z) \frac{1}{D(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\left(1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}\right)}$$

$H(z)$  puede considerarse como el producto de dos transferencias que representan dos subsistemas en cascada, un sistema todo ceros representado por la transferencia  $N(z)$  y un sistema todo polos representado por  $1/D(z)$ , con entrada  $x[n]$ , una señal intermedia  $v[n]$  y salida  $y[n]$ .

$$\begin{cases} V(z) = X(z)N(z) = X(z) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \\ Y(z) = V(z) \frac{1}{D(z)} = \frac{V(z)}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{TZ} \\ \leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} v[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n - k] \\ y[n] = v[n] - \sum_{k=1}^N a_k y[n - k] \end{cases}$$

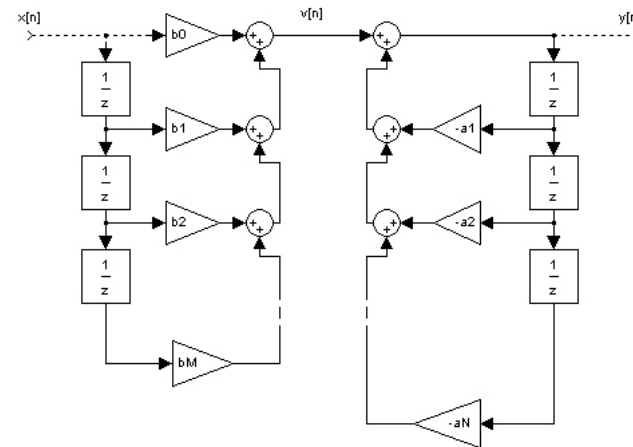


Figura 5: Estructura en la forma directa I de un filtro IIR

Esta implementación requeriría  $M+N+1$  productos, y  $M+N$  retardos y sumas.

Cambiando el orden de los factores se tiene la misma transferencia  $H(z)$

$$H(z) = \frac{1}{D(z)} N(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\left(1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}\right)}$$

Ahora,  $H(z)$  representa los mismos subsistemas en cascada pero conectados en orden distinto: Primero el sistema todo polos  $1/D(z)$  y luego el sistema todo ceros  $N(z)$ , con la misma entrada  $x[n]$  y salida  $y[n]$  pero obviamente la señal intermedia  $w[n]$  es diferente.

$$\begin{cases} W(z) = X(z) \frac{1}{D(z)} = \frac{X(z)}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \\ Y(z) = W(z) N(z) = W(z) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \end{cases} \quad \begin{cases} w[n] = x[n] - \sum_{k=1}^N a_k w[n-k] \\ y[n] = \sum_{k=0}^M b_k w[n-k] \end{cases}$$

Ahora quedan dos columnas de retardos. Ambas están alimentadas por la señal intermedia  $w[n]$ . La señal que ingresa a cada retardo de la columna de retardos del primer subsistema, es la misma que la que ingresa a cada retardo de la columna del segundo subsistema. Por eso, ambas columnas de retardos pueden colapsarse en una sola. Esto permite un ahorro de retardos requiriéndose una cantidad igual al máximo entre  $N$  y  $M$

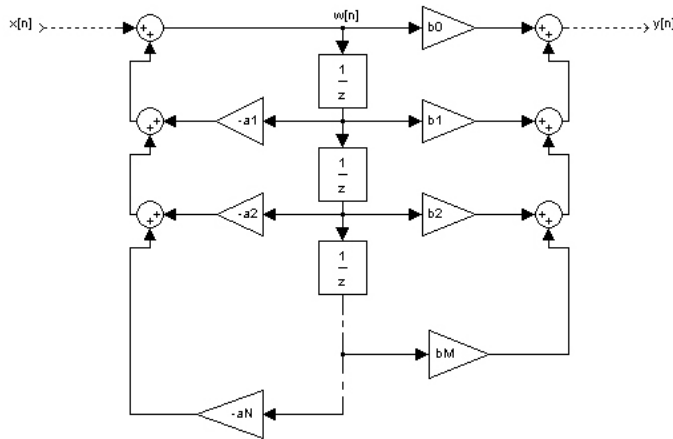


Figura 6: Estructura en la forma directa II de un filtro IIR

#### 4. Estructura en cascada.

En los filtros, para implementar una estructura en cascada se expresa la transferencia como producto de factores. En el caso de un filtro FIR, se calculan las raíces del polinomio  $H(z)$ , es decir, los ceros. Así,  $H(z)$  se expresa como producto de factores de la forma  $(1 - c_k z^{-1})$

$$H(z) = \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})$$

Estos ceros pueden ser reales o complejos. Los factores pertenecientes a un cero complejo y su conjugado deben agruparse, haciendo el producto, para obtener polinomios de grado dos con coeficientes reales. Los ceros reales, de a pares, pueden agruparse también en secciones de segundo orden. Si la cantidad de raíces es impar, una de las secciones queda incompleta. Si  $H_k(z)$  es la transferencia de la  $k$ -ésima sección de segundo orden, la transferencia total del filtro  $H(z)$  puede expresarse como el producto de todas las  $H_k(z)$

$$H_k(z) = (1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z^{-1}) = (b_{k0} + b_{k1} z^{-1} + b_{k2} z^{-2}) \Rightarrow H(z) = \prod_{k=1}^K H_k(z) ; K = \text{int}\left\{\frac{M+1}{2}\right\}$$

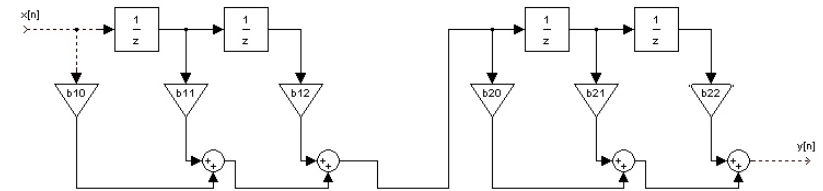


Figura 7: Estructura cascada de secciones de 2do orden para un filtro FIR

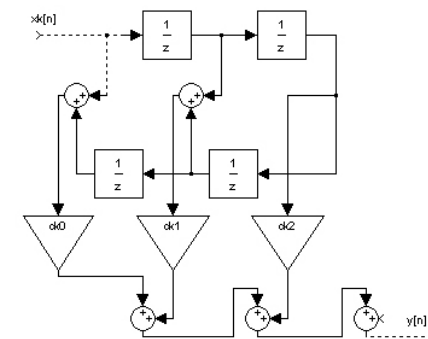


Figura 8: Sección de 4to orden para una estructura en cascada de un FIR simétrico

Si el filtro FIR tiene algún tipo de simetría por ser de fase lineal, se puede aprovechar esa característica formando secciones de cuarto orden para reducir a la mitad los productos, donde la transferencia de cada sección tiene la forma

$$H_k(z) = c_{k0} + c_{k1}z^{-1} + c_{k2}z^{-2} + c_{k1}z^{-3} + c_{k0}z^{-4}$$

Para el caso de un IIR, deben calcularse los ceros y polos, es decir, las raíces de los polinomios del numerador y el denominador. Así, para cada raíz  $x_k$ , tanto el numerador como el denominador de  $H(z)$  pueden expresarse como el producto de factores de la forma  $(1-x_kz^{-1})$

$$H(z) = \frac{\prod_{k=0}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=0}^N (1 - p_k z^{-1})}$$

Tanto los ceros como los polos pueden ser reales o complejos. En este caso se procede igual que en los FIR, agrupando para formar las secciones de segundo orden. Si  $H_k(z)$  es la transferencia de la sección  $k$ ,  $H(z)$  puede expresarse como el producto de todas las  $H_k(z)$

$$H_k(z) = \frac{(1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z^{-1})}{(1 - p_k z^{-1})(1 - p_k^* z^{-1})} = \frac{b_{k0} + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2}}{1 + a_{k1}z^{-1} + a_{k2}z^{-2}} \Rightarrow H(z) = \prod_{k=1}^K \frac{b_{k0} + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2}}{1 + a_{k1}z^{-1} + a_{k2}z^{-2}} = \prod_{k=1}^K H_k(z)$$

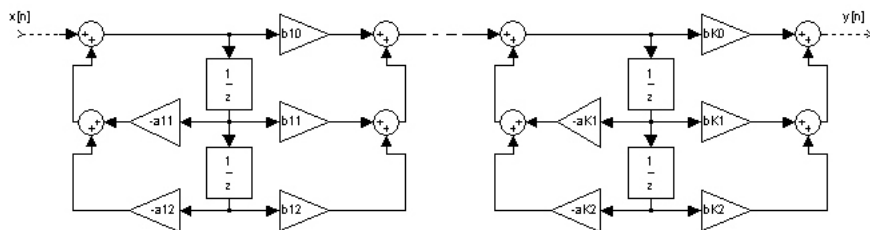


Figura 9: Estructura en cascada de un filtro IIR.

## 5. Estructura en paralelo.

En los filtros IIR, si se expresa la transferencia  $H(z)$  como suma de términos, se puede implementar una estructura en paralelo. Para esto, deben calcularse los polos  $p_k$  con sus respectivos residuos  $r_k$ , y los términos directos  $d$  a fin de expresar  $H(z)$  como una suma

$$H(z) = d + \sum_{k=0}^N \frac{r_k}{1 - p_k z^{-1}}$$

En el caso paralelo también se busca formar secciones de segundo orden reuniendo pares de términos, en este caso sumándolos. Los polos pueden ser reales o complejos. En el primer caso pueden agruparse en pares, arbitrariamente, y en el segundo caso, deben sumarse los términos pertenecientes a un polo complejo y su conjugado, para obtener secciones de orden dos con coeficientes reales. La transferencia es

$$H_k(z) = \frac{r_k}{1 - p_k z^{-1}} + \frac{r_k^*}{1 - p_k^* z^{-1}} = \frac{b_{k0} + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2}}{1 + a_{k1}z^{-1} + a_{k2}z^{-2}} \Rightarrow H(z) = d + \sum_{k=1}^K \frac{b_{k0} + b_{k1}z^{-1}}{1 + a_{k1}z^{-1} + a_{k2}z^{-2}} = d + \sum_{k=1}^K H_k(z)$$

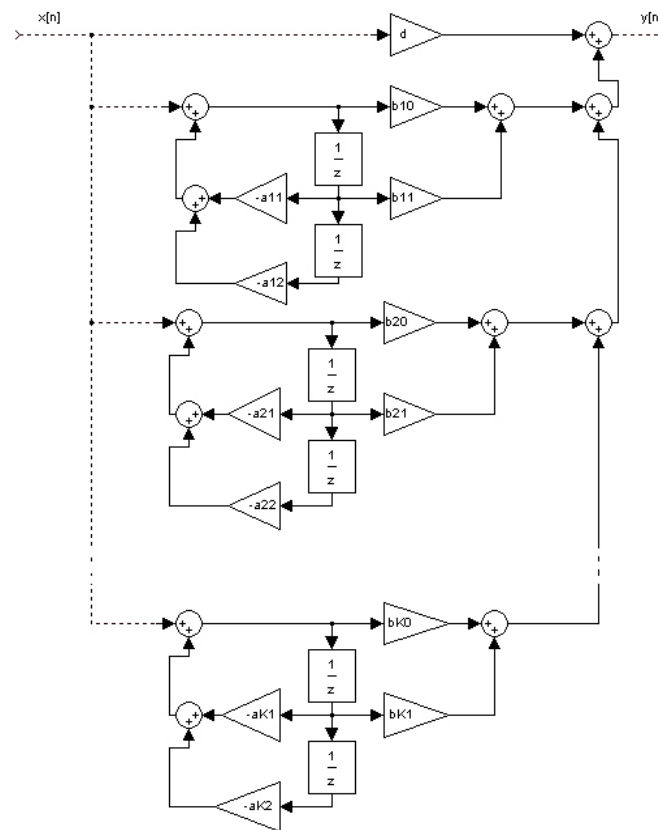


Figura 10: Estructura en paralelo de un filtro IIR.

## 5. Estructura en celosía.

Una etapa de la estructura en celosía de filtro FIR está compuesta por dos líneas, una directa y la otra con retardos, donde un sumador en cada línea adiciona la señal proveniente de la otra, ponderada por una ganancia. Cada línea tiene una entrada y una salida propia.

Para la etapa  $m$ -ésima de un filtro FIR de orden  $M=L-1$ , donde  $L$  es el número de coeficientes, en el instante  $n$ , la salida de la línea directa es  $f_m[n]$  y la de la línea con retardo  $g_m[n]$ , mientras que las entradas se llaman  $f_{m-1}[n]$  y  $g_{m-1}[n]$  respectivamente. La ganancia que pondera las señales cruzadas posee el mismo valor  $k_m$  denominado coeficiente de reflexión.

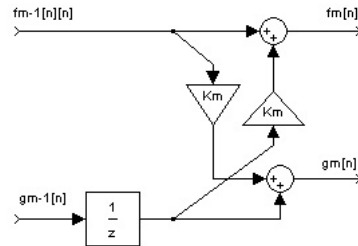


Fig. 11: Etapa  $m$ -ésima de una estructura en celosía de un filtro FIR.

Del diagrama en bloques puede verse que las salidas de la  $m$ -ésima etapa son

$$\begin{cases} f_m[n] = f_{m-1}[n] + K_m g_{m-1}[n-1] \\ g_m[n] = K_m f_{m-1}[n] + g_{m-1}[n-1] \end{cases} \quad \text{con } m = 1; 2; \dots; M$$

Realizando la transformada  $z$  término a término

$$\begin{cases} F_m(z) = F_{m-1}(z) + K_m z^{-1} G_{m-1}(z) \\ G_m(z) = K_m F_{m-1}(z) + z^{-1} G_{m-1}(z) \end{cases} \quad \text{con } m = 1; 2; \dots; M$$

En la estructura completa de un filtro FIR de orden  $M$  se conectan  $M$  etapas en cascada. La señal de entrada se aplica a las entradas de las dos líneas de la primera etapa, y la salida se toma sólo de la salida de la línea directa de la última etapa.

$$\begin{cases} f_0[n] = g_0[n] = x[n] \\ f_M[n] = y[n] \end{cases}$$

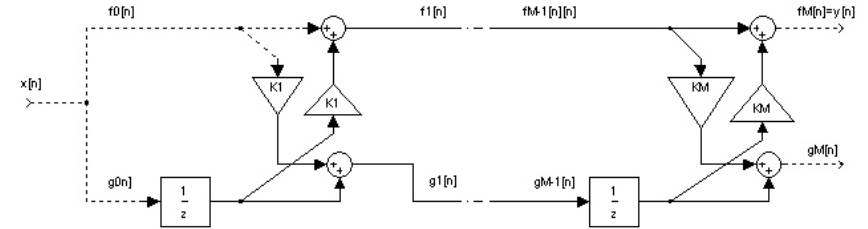


Figura 12: Estructura en celosía de un filtro FIR.

Tanto para la línea directa como para la línea de retardos, puede calcularse la transferencia total hasta una etapa  $m$ -ésima, como la relación entre la primera entrada general y la salida considerada en la etapa  $m$ -ésima. Estas transferencias son polinomios de orden  $m$  y para cada línea se tiene respectivamente

$$\begin{cases} \frac{F_m(z)}{F_0(z)} = A_m(z) = \sum_{k=0}^m \alpha_m(k) z^{-k} = \alpha_m(0) + \dots + \alpha_m(m) z^{-m} \\ \frac{G_m(z)}{G_0(z)} = B_m(z) = \sum_{k=0}^m \beta_m(k) z^{-k} = \beta_m(0) + \dots + \beta_m(m) z^{-m} \end{cases} \quad \text{con } m = 1; \dots; M$$

La transferencia de la etapa  $m$ -ésima puede expresarse en función de la transferencia hasta la etapa anterior, más la transferencia propia de la etapa analizada. Observando que en cada etapa sólo se adiciona la señal proveniente de la otra línea, puede escribirse

$$\begin{cases} A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z) \\ B_m(z) = K_m A_{m-1}(z) + z^{-1} B_{m-1}(z) \end{cases} \quad \text{con } m = 1; \dots; M$$

Eliminando  $B_{m-1}(z)$  y despejando se obtiene

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2} \quad \text{con } m = 1; 2; \dots; M$$

El caso de un filtro FIR de orden 1, la estructura en celosía tiene una sola etapa. Para esta situación, la salida de cada línea es

$$\begin{cases} f_1[n] = x[n] + K_1 x[n-1] = y[n] \\ g_1[n] = K_1 x[n] + x[n-1] \end{cases}$$

Y la transferencia de cada línea, para ese caso, es

$$\begin{cases} A_1(z) = \alpha_1(0) + \alpha_1(1)z^{-1} \\ B_1(z) = \beta_1(0) + \beta_1(1)z^{-1} \end{cases}$$

De aquí se observa que

$$\begin{cases} \alpha_1(0) = \beta_1(1) = 1 \\ \alpha_1(1) = \beta_1(0) = K_1 \end{cases}$$

Para el caso de un filtro FIR de orden 2, se conectan dos etapas en casadas. Para calcular la salida de cada línea se pueden utilizar los resultados anteriores

$$\begin{cases} f_2[n] = f_1[n] + K_2 g_1[n-1] = x[n] + K_1(1 + K_2)x[n-1] + K_2 x[n-2] = y[n] \\ g_2[n] = g_1[n-1] + K_2 f_1[n] = K_2 x[n] + K_1(1 + K_2)x[n-1] + x[n-2] \end{cases}$$

La transferencia de cada línea, para ese caso, es

$$\begin{cases} A_2(z) = \alpha_2(0) + \alpha_2(1)z^{-1} + \alpha_2(2)z^{-2} \\ B_2(z) = \beta_2(0) + \beta_2(1)z^{-1} + \beta_2(2)z^{-2} \end{cases}$$

De aquí se observa que

$$\begin{cases} \alpha_2(0) = \beta_2(2) = 1 \\ \alpha_2(1) = \beta_2(1) = K_1(1 + K_2) \\ \alpha_2(2) = \beta_2(0) = K_2 \end{cases}$$

De lo anterior, puede inferirse la transferencia de cada línea hasta la etapa m-ésima

$$\begin{cases} A_m(z) = \alpha_m(0) + \dots + \alpha_m(m)z^{-m} \\ B_m(z) = \beta_m(0) + \dots + \beta_m(m)z^{-m} \end{cases}$$

donde los coeficientes  $\alpha$  de la transferencia directa  $A(z)$  hasta la etapa m-ésima son los mismos que los coeficientes  $\beta$  de la transferencia de la línea de retardos  $B(z)$  ordenados inversamente, es decir, el coeficiente del término de grado cero,  $\alpha(0)$ , es igual al coeficiente del término de grado m,  $\beta(m)$

$$\begin{cases} \alpha_m(0) = \beta_m(m) \\ \alpha_m(1) = \beta_m(m-1) \\ \vdots \\ \alpha_m(m) = \beta_m(0) \end{cases}$$

Y generalizando el análisis previo se obtienen los coeficientes de reflexión como

$$K_i = \alpha_i(i) \quad \text{con } i = 1, \dots, M$$

Para obtener la estructura en celosía de M etapas de un filtro FIR de orden M, se parte de su transferencia  $H(z)$ . Dicho polinomio, obviamente coincide con el polinomio de la transferencia directa  $A(z)$  hasta la última etapa de la estructura en celosía ya que ambos representan la relación entre la salida y la entrada del sistema, y dicha relación es la misma independientemente de la forma organizativa que se de a su estructura

$$H(z) = A_M(z)$$

Cada uno de los coeficientes  $b_k$  se corresponde con el coeficiente  $\alpha_M(k)$

$$b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M} = \alpha_M(0) + \dots + \alpha_M(M) z^{-M} \rightarrow b_m = \alpha_M(m)$$

De ahí se obtiene el último coeficiente de reflexión con el cual se inicia el proceso de cálculo del resto

$$K_M = \alpha_M(M) = b_M$$

Recursivamente, se obtienen los coeficientes de las transferencias hasta cada una de las etapas anteriores, recordando que los coeficientes de la transferencia  $A(z)$  de la línea directa tienen el orden inverso a los de la transferencia  $B(z)$  de la línea con retardos

$$\begin{aligned} A_{m-1}(z) &= \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2} \quad \text{con } m = 1, 2, \dots, M \\ \alpha_m[k] &= \beta_m[k-m] \quad \text{con } k = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Para obtener los coeficientes de la estructura directa a partir de los coeficientes de reflexión de la celosía se deben realizar los pasos inversos, utilizando las tres últimas relaciones deducidas precedentemente. Sabiendo que  $\alpha_m(0)=1$  para todo m, el proceso se inicia partiendo del  $K_1$ , armando  $A_1(z)$  y luego  $B_1(z)$  ordenando los coeficientes al revés, y con la fórmula recursiva se obtienen el resto de las transferencias parciales hasta  $A_M(z)=H(z)$ .



La transferencia de un filtro IIR todo polos, es el inverso de la transferencia de un filtro FIR. Por lo tanto, podría utilizarse la misma estructura celosía pero conectando la entrada y la salida de la línea directa en orden inverso.

De esta forma, una etapa m-ésima de un filtro IIR todo polos, puede organizarse tomando como salida de la línea directa a  $f_{m-1}[n]$  y como entrada a  $f_m[n]$ . La línea con retardo funciona como una línea de realimentación de la salida  $g_{m-1}[n]$  hacia la entrada  $g_m[n]$ .

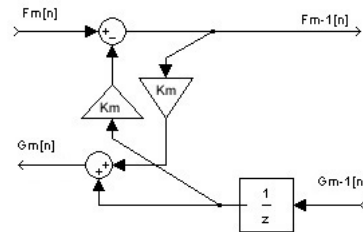


Fig. 13: Etapa m-ésima de una estructura en celosía de un filtro IIR todo polos.

Con esta organización de las entradas y las salidas, se mantienen las mismas relaciones descritas para el filtro FIR, con la única salvedad de que, como se han invertido los roles de la entrada y la salida en la línea directa, se despeja  $f_{m-1}[n]$  en función de  $f_m[n]$

$$\begin{cases} f_{m-1}[n] = f_m[n] - K_m g_{m-1}[n-1] \\ g_m[n] = K_m f_{m-1}[n] + g_{m-1}[n-1] \end{cases} \quad \text{con } m = 1; 2; \dots; N$$

En la estructura completa de un IIR todo polos de orden N, la señal de entrada se aplica en  $f_N[n]$ . En  $f_0[n]$  se toma la salida, que es realimentada a través de la línea inferior con retardos a partir de  $g_0[n]$

$$\begin{cases} f_N[n] = x[n] \\ f_0[n] = g_0[n] = y[n] \end{cases}$$

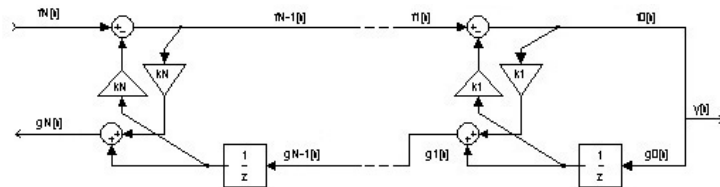


Figura 14: Estructura en celosía de un filtro IIR todo polos.

Las conclusiones obtenidas para el caso del filtro FIR son aplicables al IIR todo polos. En este caso, la transferencia total desde una etapa m-ésima, es la relación entre la entrada en dicha etapa m-ésima y la salida general.

$$\begin{cases} F_0(z) = \frac{1}{A_m(z)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^m \alpha_m(k) z^{-k}} = \frac{1}{\alpha_m(0) + \dots + \alpha_m(m) z^{-m}} \\ G_m(z) = B_m(z) = \sum_{k=0}^m \beta_m(k) z^{-k} = \beta_m(0) + \dots + \beta_m(m) z^{-m} \end{cases} \quad \text{con } m = 1; \dots; N$$

Igualmente, como se obtuvo para el caso de un filtro FIR, la transferencia de la etapa m-ésima puede expresarse en función de la transferencia hasta la etapa anterior, más la transferencia propia de la etapa analizada. Como  $f_N[n]$  ahora es la entrada y  $f_0[n]$  la salida

$$\begin{cases} A_{m-1}(z) = A_m(z) - K_m z^{-1} B_{m-1}(z) \\ B_m(z) = K_m A_{m-1}(z) + z^{-1} B_{m-1}(z) \end{cases} \quad \text{con } m = 1; \dots; N$$

Reemplazando y despejando se obtiene

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2} \quad \text{con } m = 1; 2; \dots; N$$

Un filtro IIR todo polos de orden 1 tiene una estructura en celosía con una sola etapa. Para esta situación, las ecuaciones que vinculan las entradas y salidas son

$$\begin{cases} f_0[n] = f_1[n] - K_1 g_0[n-1] \\ g_1[n] = K_1 f_0[n] + g_0[n-1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_0[n] = y[n] = x[n] - K_1 y[n-1] \\ g_1[n] = K_1 x[n] + y[n-1] \end{cases}$$

La transferencia de cada línea, para ese caso, se obtiene de la misma manera que en el caso de un FIR.

Se observa que la primera ecuación da la relación de un IIR todo polos con entrada  $x[n]$  y salida  $f_0[n]=y[n]$ , mientras que la segunda ecuación representa un FIR armado de atrás hacia adelante, pues su entrada es  $y[n]$  y su salida es  $g_1[n]$ . En ambos casos, el IIR y el FIR tienen los mismos coeficientes (1 y  $K_1$ ) pero ordenados en forma inversa.

Para el caso de un filtro IIR todo polos de orden 2, utilizando los resultados anteriores, puede calcularse la salida de cada línea

$$\begin{cases} f_0[n] = f_1[n] - K_1 g_0[n-1] \\ g_1[n] = K_1 f_0[n] + g_0[n-1] \\ f_1[n] = f_2[n] - K_2 g_1[n-1] \\ g_2[n] = K_2 f_1[n] + g_1[n-1] \\ f_2[n] = x[n] \\ f_0[n] = g_0[n] = y[n] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_0[n] = y[n] = -K_1(1+K_2)y[n-1] - K_2y[n-2] + x[n] \\ g_2[n] = K_2y[n] + K_1(1+K_2)y[n-1] + y[n-2] \end{cases}$$

Como la transferencia se obtiene del mismo modo, puede inferirse la transferencia de cada línea hasta la etapa m-ésima para filtros IIR todo polos.

Al igual que en el caso de un sistema de primer orden, se observa que la primera ecuación da la relación de un IIR todo polos con entrada  $x[n]$  y salida  $f_0[n]=y[n]$ , mientras que la segunda ecuación representa un FIR armado de atrás hacia adelante con entrada  $y[n]$  y salida  $g_2[n]$ . El IIR y el FIR tienen los mismos coeficientes ( $1, K_1(1+K_2)$  y  $K_2$ ) pero ordenados en forma inversa. Por inducción completa, esto vale para cualquier  $N$ .

Para el caso de un filtro IIR todo polos de orden  $N$ , si  $H_a(z)$  es su transferencia, la misma coincide con el inverso de la transferencia directa hasta la última etapa de la estructura en celosía "hacia adelante"

$$H_a(z) = \frac{1}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N}} = \frac{1}{A_N(z)} \quad \therefore a_m = \alpha_N(m)$$

De ahí se obtiene el último coeficiente de reflexión

$$K_N = \alpha_N(N) = a_N$$

Como en el caso de la estructura en celosía para el FIR, recursivamente se obtienen los coeficientes de las transferencias hasta cada una de las etapas (la etapa  $N$  es la primera y la 1 la última)

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2} \quad \text{con } m = 1; 2; \dots; N$$

$$\alpha_m(k) = \beta_m(m-k) \quad \text{con } k = 1; 2; \dots; m$$

Además, la transferencia del sistema FIR "hacia atrás" es

$$H_b(z) = \frac{G_N(z)}{Y(z)} = \frac{G_N(z)}{G_0(z)} = B_N(z) = z^{-N} A_N(z^{-1}) \quad \therefore \beta_N(m) = \alpha_N(N-m)$$

En el caso de un IIR genérico, con polos y ceros, la transferencia es del tipo

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M c_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} = \frac{C_M(z)}{A_N(z)}$$

donde se designó a los coeficientes del numerador como  $c_k$  en lugar de  $b_k$  como es habitual, a fin de evitar confusiones con la transferencia de la línea con retardos  $B_m(z)$ .

El sistema IIR genérico, con polos y ceros, puede considerarse compuesto por un subsistema IIR todo polos, seguido de un subsistema FIR

$$\begin{cases} w[n] = x[n] - \sum_{k=1}^N a_k w[n-k] \\ y[n] = \sum_{k=1}^M c_k w[n-k] \end{cases}$$

En todo sistema FIR la salida es una combinación lineal de la entrada en el presente y en instantes pasados. En este caso, la salida  $y[n]$  es una combinación lineal de  $w[n-k]$ , la entrada al subsistema FIR. Como  $w[n-k]$  es la salida del subsistema IIR todo polos en los diferentes instantes  $k$ , el sistema FIR puede construirse mediante una combinación lineal de las salidas de la estructura en celosía cada etapa del sistema IIR todo polos.

Como se vio anteriormente para un IIR todo polos, el sistema "hacia adelante" en la estructura en celosía es un sistema todo polos con entrada  $x[n]$  y salida  $f_0[n]=y[n]$ . La transferencia hasta la m-ésima etapa en la línea directa está dada por  $A_m(z)$ . Asimismo, el sistema "hacia atrás" es un sistema todo ceros con entrada  $y[n]$  y salida  $g_N[n]$ . Por ende, cada  $g_m[n]$  es una combinación lineal de  $y[n-k]=g_0[n-k]$  en los diferentes  $k$ . La transferencia de la línea con retardos hasta la etapa m-ésima está dada por  $B_m(z)$ . De esta manera, cualquier combinación lineal de  $g_m[n]$  para  $m=0; 1; \dots; N$  es un sistema todo ceros. Esto puede utilizarse para formar el subsistema FIR, tomando las salidas de la línea con retardos de la celosía para formar lo que se denomina estructura en escalera, cuya salida final es

$$y[n] = \sum_{m=0}^M v_m g_m[n-k]$$

Para esto, deben calcularse los coeficientes de la escalera que ponderan las salidas, denotados como  $v_m$ . Calculando la transformada  $z$  de  $y[n]$  y dividiendo por  $X(z)$  se obtiene la transferencia. Operando con el hecho de que  $F_0(z)=G_0(z)$  y que la entrada  $X(z)$  ahora es  $F_N(z)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{m=0}^M \frac{v_m G_m(z)}{X(z)} = \sum_{m=0}^M \frac{v_m G_m(z) F_0(z)}{G_0(z) F_N(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M v_m B_m(z)}{A_N(z)}$$

Comparando con la primer expresión del numerador de H(z) para un IIR genérico

$$C_M(z) = \sum_{m=0}^M v_m B_m(z)$$

expresión que define la transferencia del subsistema FIR en función de una combinación lineal de las salidas de la línea con retardos en base a los parámetros de la escalera.

El polinomio  $C_M(z)$  representaba la transferencia del subsistema FIR

$$C_M(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_M z^{-M}$$

La sumatoria es

$$\sum_{m=0}^M v_m B_m(z) = v_0 + v_1 B_1(z) + \dots + v_M B_M(z)$$

Escribiendo cada  $B_m(z)$  como un polinomio con coeficientes  $\beta_m(k)$  para  $k=0; 1; \dots; m$

$$\sum_{m=0}^M v_m B_m(z) = v_0 + v_1 [\beta_1(0) + \beta_1(1) z^{-1}] + v_2 [\beta_2(0) + \beta_2(1) z^{-1} + \beta_2(2) z^{-2}] \dots + v_M [\beta_M(0) + \dots + \beta_M(M) z^{-M}]$$

Aplicando la propiedad distributiva del producto

$$\sum_{m=0}^M v_m B_m(z) = v_0 + [v_1 \beta_1(0) + v_1 \beta_1(1) z^{-1}] + \dots + [v_M \beta_M(0) + \dots + v_M \beta_M(M) z^{-M}]$$

Agrupando los términos con potencias de z iguales

$$\sum_{m=0}^M v_m B_m(z) = [v_0 + v_1 \beta_1(0) + \dots + v_M \beta_M(0)] + [v_1 \beta_1(1) + \dots + v_M \beta_M(1)] z^{-1} + \dots + [v_M \beta_M(M-1) + v_M \beta_M(M)] z^{-(M-1)} + [v_M \beta_M(M)] z^{-M}$$

Como  $\beta_m(m)=1$  para todo m, comparando  $C_M(z)$  término a término con la sumatoria, del coeficiente de mayor grado del numerador de H(z) puede obtenerse el último coeficiente de la escalera

$$C_M = v_M$$

También puede definirse la transferencia del subsistema FIR para una etapa m-ésima cualquiera en función de la combinación lineal de las salidas de la línea con retardos en base a los parámetros de la escalera.

$$C_m(z) = v_0 B_0(z) + \dots + v_{m-1} B_{m-1}(z) + v_m B_m(z) = \sum_{k=0}^{m-1} v_k B_k(z) + v_m B_m(z) = C_{m-1}(z) + v_m B_m(z)$$

Despejando, recursivamente se pueden obtener las transferencias hasta cada una de las etapas anteriores, partiendo de  $C_M(z)$

$$C_{m-1}(z) = C_m(z) - v_m B_m(z) \quad \text{con } m = M; M-1; \dots; 1; 0$$

Como  $\beta_m(m)=1$  para todo m, en todos los casos se verifica que

$$v_i = c_i \quad \text{con } i = M; M-1; \dots; 1; 0$$

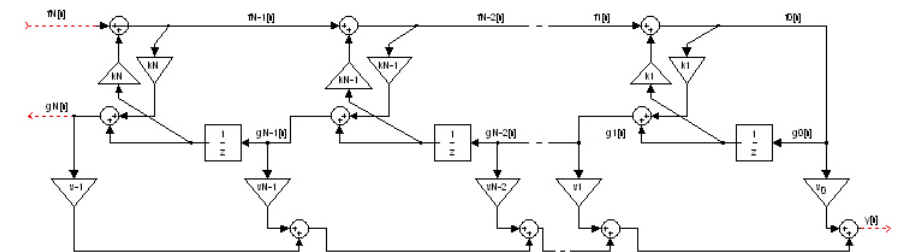


Figura 15: Estructura en celosía escalonada de un filtro IIR

## Ayuda para ejercicios de simulación

### tf2zp

Calcula los ceros, polos y factores a partir de los coeficientes de un cociente de polinomios

Sintaxis	Ejemplo
<code>[z,p,k] = tf2zp(b,a)</code>	<code>b = [2 3];</code> <code>a = [1 0.4 1];</code> <code>%long{b}=long{a}</code> <code>[b,a] = eqtflength(b,a);</code> <code>%obtencion forma z-p-k</code> <code>[z,p,k] = tf2zp(b,a)</code>
<b>b, a:</b> vectores de coeficientes del numerador y denominador <code>long{a} = columnas{b}</code> <b>z:</b> matriz de ceros <b>p, k:</b> vectores de polos y factor multiplicador	<code>b = [2 3];</code> <code>a = [1 0.4 1];</code>  <code>k</code> <code>= 2</code>
<b>Descripción</b> $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_Mz^{-M}}{a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N}}$ $\Leftrightarrow H(z) = k \frac{(z - z_0)(z - z_1)\dots(z - z_M)}{(z - p_0)(z - p_1)\dots(z - p_N)}$	

### zp2sos

Calcula secciones de orden dos a partir de los polos, ceros y factor de una expresión racional

Sintaxis	Descripción
<code>[sos,g]=zp2sos(z,p,k,'order','scale')</code>	<b>'inf':</b> con 'up' minimiza overflow <b>'two':</b> con 'down' minimiza el ruido
<b>z y p:</b> vectores de polos y ceros <b>k:</b> factor de ganancia <b>sos:</b> matriz de coeficientes de las secciones <code>dim{sos}=Kx6</code> <b>g:</b> ganancia <b>'order':</b> orden de los polos de sos <b>'down':</b> p cercanos a $ z =1$ <b>'up':</b> (por defecto) p lejos de $ z =1$ <b>'scale':</b> escala ganancia y numerador <b>'none':</b> (por defecto) ninguna	$H(z) = k \frac{(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2)\dots(z - p_N)}$ $\Leftrightarrow H(z) = g \prod_{k=1}^K H_k(z) = g \prod_{k=1}^K \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}$ $\therefore \text{sos} = \begin{bmatrix} b_{01} & b_{11} & b_{21} & 1 & -a_{11} & -a_{21} \\ b_{02} & b_{12} & b_{22} & 1 & -a_{12} & -a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{0K} & b_{1K} & b_{2K} & 1 & -a_{1K} & -a_{2K} \end{bmatrix}$

### zp2tf

Calcula los coeficientes de un cociente de polinomios a partir de los ceros, polos y factores

Sintaxis	Ejemplo
<code>[b,a] = zp2tf(z,p,k)</code>	<code>z = [0; -1.5000];</code> <code>p = [-0.2+0.9798i; -0.2-0.9798i];</code> <code>k = 2;</code> <code>[b,a] = zp2tf(z,p,k)</code>
<b>z:</b> matriz de ceros <b>p, k:</b> vectores de polos y factor multiplicador <b>b, a:</b> vectores de coeficientes del numerador y denominador <code>filas{b} = columnas{z}</code>	<code>b</code> <code>= 2 3 0</code> <code>a</code> <code>= 1.0000 0.4000 1.0000</code>
<b>Descripción</b> $H(z) = k \frac{(z - z_0)(z - z_1)\dots(z - z_M)}{(z - p_0)(z - p_1)\dots(z - p_N)}$ $\Leftrightarrow H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_Mz^{-M}}{a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N}}$	

### sos2zp

Calcula los polos, ceros y factor de una expresión racional a partir de secciones de orden dos

Sintaxis	Descripción
<code>[z,p,k]=zp2sos(sos,g)</code>	$H(z) = g \prod_{k=1}^K H_k(z) = g \prod_{k=1}^K \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}$
<b>sos:</b> matriz de coeficientes de las secciones <code>dim{sos}=Kx6</code> <b>g:</b> ganancia <b>z y p:</b> vectores de polos y ceros <b>k:</b> factor de ganancia	$\therefore \text{sos} = \begin{bmatrix} b_{01} & b_{11} & b_{21} & 1 & -a_{11} & -a_{21} \\ b_{02} & b_{12} & b_{22} & 1 & -a_{12} & -a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{0K} & b_{1K} & b_{2K} & 1 & -a_{1K} & -a_{2K} \end{bmatrix}$ $\Leftrightarrow H(z) = k \frac{(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2)\dots(z - p_N)}$

## tf2sos

Calcula secciones de orden dos a partir de los coeficientes de un cociente de polinomios

Sintaxis	Descripción
$[sos, g] = tf2sos(b, a, 'order', 'scale')$	<p>'inf': con 'up' minimiza overflow 'two': con 'down' minimiza el ruido</p>
<p><b>b</b> y <b>a</b>: coeficientes del numerador y denominador del cociente de polinomios long{a} = columnas{b}</p> <p><b>sos</b>: matriz de coeficientes de las secciones dim{sos}=Kx6</p> <p><b>g</b>: ganancia</p> <p>'order': orden de los polos de sos 'down': p cercanos a <math> z =1</math> 'up': (por defecto) p lejos de <math> z =1</math> 'scale': escala ganancia y numerador 'none': (por defecto) ninguna</p>	$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_1 + b_2z^{-1} + \dots + b_{nb+1}z^{-M}}{a_1 + a_2z^{-1} + \dots + a_{na+1}z^{-N}}$ $\Leftrightarrow H(z) = g \prod_{k=1}^K H_k(z) = g \prod_{k=1}^K \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}$ $\therefore sos = \begin{bmatrix} b_{01} & b_{11} & b_{21} & 1 & -a_{11} & -a_{21} \\ b_{02} & b_{12} & b_{22} & 1 & -a_{12} & -a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{0K} & b_{1L} & b_{2K} & 1 & -a_{1K} & -a_{2K} \end{bmatrix}$

## tf2latc

Calcula los coeficientes de un cociente de polinomios a partir de coeficientes de celosía

Sintaxis	Descripción
$[k, v] = tf2latc(b, a)$ $k = tf2latc(b, 'firoption')$	<p>FIR <math>\Rightarrow H(z) = A_N(z)</math></p> <p>IIR <math>\Rightarrow H(z) = \frac{C_M(z)}{A_N(z)}</math></p> <p><math>A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2}</math></p> <p><math>K_i = \alpha_i(i)</math></p> <p><math>C_{m-1}(z) = C_m(z) - v_m B_m(z)</math></p> <p><math>v_i = c_i(i)</math></p>
<p><b>b</b> y <b>a</b>: coeficientes del numerador y denominador del cociente de polinomios</p> <p>'firoptions': 'min': fase mínima 'max': fase máxima</p> <p><b>k</b> y <b>v</b>: coeficientes de celosía y escalera</p>	

## sos2tf

Calcula los coeficientes de un cociente de polinomios a partir de los ceros, polos y factores

Sintaxis	Descripción
$[b, a] = sos2tf(sos, g)$	$H(z) = g \prod_{k=1}^K H_k(z) = g \prod_{k=1}^K \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}$ $\Leftrightarrow H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_1 + b_2z^{-1} + \dots + b_{nb+1}z^{-M}}{a_1 + a_2z^{-1} + \dots + a_{na+1}z^{-N}}$
<p><b>sos</b>: matriz de coeficientes de las secciones dim{sos}=Kx6</p> <p><b>g</b>: ganancia</p> <p><b>b</b> y <b>a</b>: coeficientes del numerador y denominador del cociente de polinomios long{a} = columnas{b}</p>	<p><math>\therefore sos = \begin{bmatrix} b_{01} &amp; b_{11} &amp; b_{21} &amp; 1 &amp; -a_{11} &amp; -a_{21} \\ b_{02} &amp; b_{12} &amp; b_{22} &amp; 1 &amp; -a_{12} &amp; -a_{22} \\ \vdots &amp; \vdots &amp; \vdots &amp; \vdots &amp; \vdots &amp; \vdots \\ b_{0K} &amp; b_{1L} &amp; b_{2K} &amp; 1 &amp; -a_{1K} &amp; -a_{2K} \end{bmatrix}</math></p>

## latc2tf

Calcula los coeficientes de celosía a partir de los coeficientes de un cociente de polinomios

Sintaxis	Descripción
$[b, a] = latc2tf(k, v, 'iioption')$ $b = latc2tf(k, 'firoption')$	<p>FIR <math>\Rightarrow H(z) = A_N(z)</math></p> <p>IIR <math>\Rightarrow H(z) = \frac{C_M(z)}{A_N(z)}</math></p> <p><math>A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m B_{m-1}(z) z^{-1}</math></p> <p><math>K_i = \alpha_i(i)</math></p> <p><math>C_m(z) = C_{m-1}(z) + v_m B_m(z)</math></p> <p><math>v_i = c_i(i)</math></p>
<p><b>k</b> y <b>v</b>: coeficientes de celosía y escalera</p> <p>'iioptions': 'allpole': todo polos 'allpass': pasa todo</p> <p>'firoptions': 'min': fase mínima 'max': fase máxima 'FIR': general</p> <p><b>b</b> y <b>a</b>: coeficientes del numerador y denominador del cociente de polinomios</p>	

## residuez

Expande un cociente de polinomios en orden descendente a fracciones parciales y viceversa

Sintaxis	Descripción
$[r, p, k] = \text{residuez}(b, a)$ $[b, a] = \text{residuez}(r, p, k)$	$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-N}}$ $\Leftrightarrow H(z) = \frac{r(1)}{1 - z^{-1} p(1)} + \dots + \frac{r(n)}{1 - z^{-1} p(n)} + \dots$ $\dots + k(1) + k(2)z^{-1} + \dots + k(M - N + 1)z^{-M - N}$ <p>si <math>p(j) = \dots = p(j + s - 1)</math> son polos de multiplicidad <math>s \Rightarrow</math></p> $H(z) = \dots + \frac{r(j)}{1 - z^{-1} p(j)} + \dots + \frac{r(j + s - 1)}{(1 - z^{-1} p(n))^s}$
<b>r</b> y <b>p</b> : vectores fila de residuos y polos <b>k</b> : vector columna de términos directos <b>b</b> y <b>a</b> : coeficientes del numerador y denominador del cociente de polinomios en orden decreciente $\text{long}\{a\} - 1 = \text{long}\{r\} = \text{long}\{p\}$ $\text{long}\{k\} = \text{long}\{b\} - \text{long}\{a\} + 1$	

## eqtflength

Ecuáliza la longitud del numerador y denominador de un cociente de polinomios

Sintaxis	Ejemplo
$[beq, aeq, M, N] = \text{eqtflength}(b, a)$	$b = [1 \ 2 \ 3]; a = [1 \ 2 \ 1/2 \ 1/4];$ $[beq, aeq, M, N] = \text{eqtflength}(b, a)$
<b>b</b> y <b>a</b> : coeficientes del numerador y denominador del cociente de polinomios en orden decreciente <b>beq</b> y <b>aeq</b> : coeficientes del numerador y denominador del cociente de polinomios con orden igualado <b>M</b> y <b>N</b> : orden del numerador y el denominador	$beq =$ $1 \quad 2 \quad 3 \quad 0$ $aeq =$ $1.0000 \quad 2.0000 \quad 0.5000 \quad 0.2500$ $M =$ $2$ $N =$ $3$

## cmplxpair

Ordena números en pares complejos conjugados

Sintaxis	Ejemplo
$y = \text{cmplxpair}(x, \text{tol}, \text{dim})$	$x = [0 \ 4 \ 1 + j \ j * \text{sqrt}(2) \ 1 - j \ -j * \text{sqrt}(2)];$ $y = \text{cmplxpair}(x)$
<b>x</b> : arreglo de números <b>tol</b> : tolerancia <b>dim</b> : dimensión sobre la cual se hace el ordenamiento <b>y</b> : arreglo de números ordenado según su parte real creciente, agrupando pares complejos conjugados al principio y reales puros al final	$y =$ $0 \ -1.4142i \ 0 \ +1.4142i \ 1.0000 - 1.0000i$ $1.0000 + 1.0000i \ 0 \ 4$