

# muestreo y reconstrucción

resumen, ejemplos y ejercicios



# Muestreo y Reconstrucción

## Resumen

### Resumen para ejercicios de cálculo

#### 1. Muestreo ideal como transformación matemática.

Para una señal descrita por una función de variable independiente continua, desde el punto de vista matemático, el muestreo ideal es la transformación de dicha función en otra de variable independiente discreta.

Visto en el dominio temporal, el transformador continuo/discreto es un operador matemático que realiza el producto de la función original por un tren de pulsos, dando como resultado una nueva función –si se respetan ciertas hipótesis- cuya envolvente mantiene la forma de la función original.

En el dominio espectral, el operador convoluciona la transformada de Fourier de la señal original con la transformada de un tren de pulsos (otro tren de pulsos) resultando un espectro formado por réplicas equiespaciadas del espectro original.

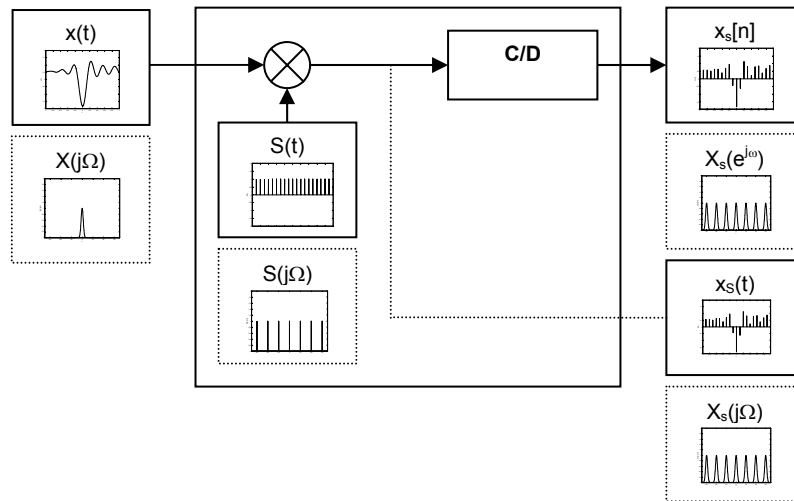


Fig.1: Operador matemático que transforma una función de variable continua en discreta

#### 2. Reconstrucción ideal como transformación matemática.

Para una señal descrita por una función de variable independiente discreta, desde el punto de vista matemático, la reconstrucción ideal es la transformación de dicha función en otra de variable independiente continua.

Visto en el dominio espectral, el transformador discreto/continuo es un operador matemático que realiza el producto de la transformada de Fourier de la señal muestreada con un filtro pasabajos ideal que –si se respetan ciertas hipótesis- elimina las replicas, recuperando el espectro original. En el dominio temporal, la función discreta se convoluciona con la respuesta impulsiva del filtro ideal (seno cardinal) resultando una señal formada por la sumatoria de dicha función con la amplitud de las muestras.

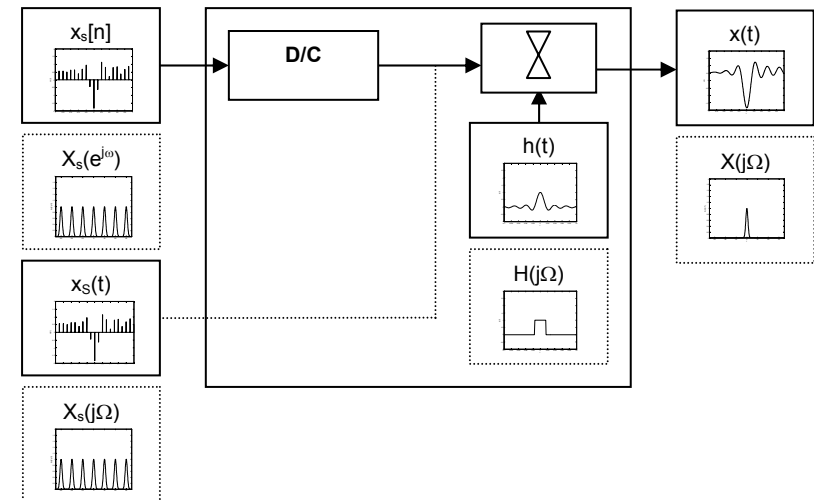


Fig.2: Operador matemático que transforma una función de variable discreta en continua

### 3. Relación entre las variables independientes continua y discreta.

La transformación mencionada anteriormente, queda definida por la relación entre la variable independiente discreta  $n$  obtenida como una colección de muestras de la variable independiente continua  $t$ , tomadas a un intervalo  $T_s$

$$T_s = \frac{t}{n}$$

Para evitar confusión, cuando los argumentos de las funciones son variables independientes continuas se escriben entre paréntesis, es decir,  $x(t)$ , y cuando son variables discretas entre corchetes, o sea,  $x[n]$ .

La función de tiempo discreto  $x[n]$  representa una colección contable de los valores que toma la función de tiempo continuo  $x(t)$  evaluada cada  $t=nT_s$ . La gráfica de ambas funciones es coincidente, pero es necesario aclarar que  $x(nT)$  es una función de tiempo continuo formada por deltas de Dirac, mientras que  $x[n]$  es una función de tiempo discreto formada por deltas de Kroneker.

$$x[n] = \sum_{+\infty}^{+\infty} x_a(nT)\delta[t - nT_s] \equiv x_a(nT)$$

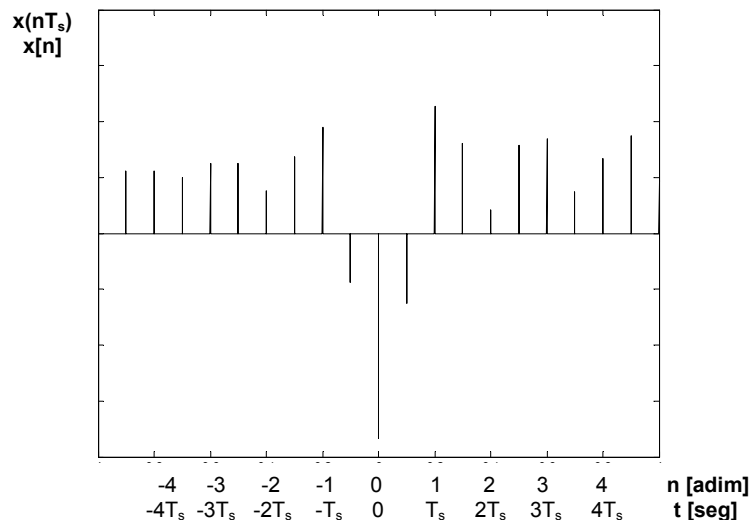


Fig. 3: Coincidencia entre la función  $x[n]$  y  $x(nT_s)$

El inverso del período de muestreo  $T_s$  es la frecuencia de muestreo

$$F_s = T_s^{-1}$$

También para evitar confusión, cuando los argumentos de las transformadas de Fourier se refieren a funciones de tiempo continuo se escriben con mayúscula, es decir,  $X(j\Omega)$  y cuando se refieren a funciones de tiempo discreto, con minúscula, o sea,  $X(e^{j\omega})$ .

Así, el espectro de la función de tiempo discreto es idéntico al de la función de tiempo continuo evaluado en  $\Omega = \omega F_s$  y replicado cada  $2k\pi$  amén de un cambio de escala de  $F_s$ .

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \equiv \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\left(\frac{\omega}{T_s} - \frac{2\pi k}{T_s}\right)\right)$$

De aquí surge naturalmente una relación entre la frecuencia o pulsación de las transformadas de señales de tiempo continuo y discreto siendo  $f$  una frecuencia relativa a  $F_s$  obtenida como el cociente entre la frecuencia  $F$  de la señal de tiempo continuo y  $F_s$

$$f = \frac{F}{F_s} = FT_s \quad \text{y} \quad \omega = 2\pi f = \Omega T_s$$

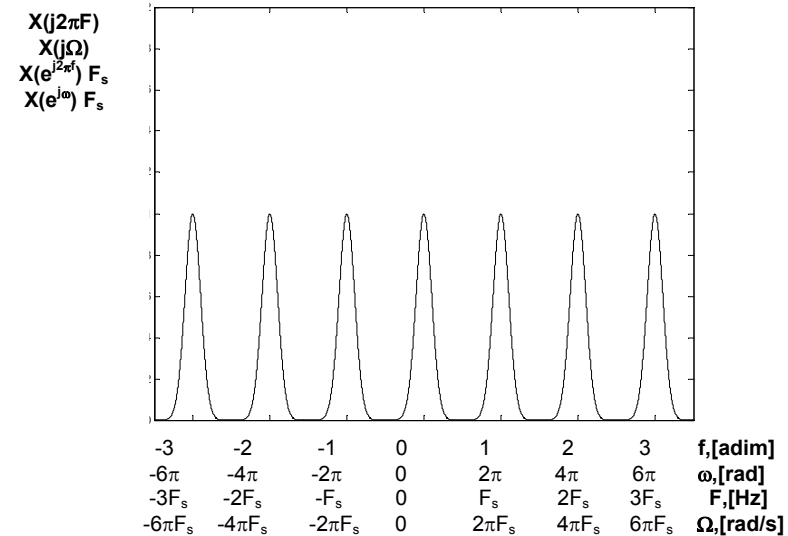


Fig. 4: Coincidencia entre la el espectro  $X(e^{j\omega})$  y  $X(\Omega)$

Señal		Espectro	
$x_a(t)$		$X_a(j\Omega)$	
$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) = \frac{1}{T_s} \text{A} \left( \frac{t}{T_s} \right)$		$S(j\Omega) = \Omega_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) = A \left( \frac{\Omega}{\Omega_s} \right)$	
$x_s(t) = x_a(t)s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(t)\delta(t - nT_s)$		$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_a(j\Omega) * S(j\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j(\Omega - k\Omega_s)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) e^{-j\Omega T_s n}$	

Tabla 1: Función y espectro en el muestreo ideal

Señal		Espectro	
$x_s(t) = x_a(t)s(t)$		$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_a(j\Omega) * S(j\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j(\Omega - k\Omega_s)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) e^{-j\Omega T_s n}$	
$h_r(t) = \text{sinc} \left( \frac{t}{T_s} \right) = \frac{\text{sen} \left( \frac{\pi t}{T_s} \right)}{\left( \frac{\pi t}{T_s} \right)}$		$H_r(j\Omega) = T_s \Pi \left( \frac{\Omega}{\Omega_s} \right) = \begin{cases} T_s & \text{si }  \Omega  \leq \frac{\Omega_s}{2} \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$	
$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \text{sinc} \left( \frac{t - nT_s}{T_s} \right)$		$X(j\Omega) = T_s \Pi \left( \frac{\Omega}{\Omega_s} \right) X_s(j\Omega) = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j(\Omega - k\Omega_s)) & \text{si }  \Omega  \leq \frac{\Omega_s}{2} \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$	

Tabla 2: Función y espectro en la reconstrucción ideal

#### 4. Teorema del Muestreo.

Para que el muestreo ideal conduzca a una señal que pueda ser recuperada intacta mediante reconstrucción ideal debe cumplirse el Teorema de Muestreo. Este establece que si  $x(t)$  es una señal de banda limitada en  $\Omega_N = 2\pi F_N$  y es muestreada al menos al doble de la frecuencia máxima, entonces  $x(t)$  queda determinada de forma única por sus muestras  $x[n]$ . De otro modo

$$x(t) \stackrel{TF}{\leftrightarrow} X(j\Omega) \quad / \quad X(j\Omega) = 0 \quad \forall |\Omega| \geq \Omega_N \quad \wedge \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \geq \Omega_N \Rightarrow x(t) \stackrel{\text{muestreo}}{\leftrightarrow} x[n] \stackrel{\text{reconstrucción}}{\leftrightarrow} x(t)$$

En ese caso, las réplicas periódicas del espectro original, producidas por el muestreo, no se solapan. La reconstrucción ideal se realiza eliminando dichas réplicas con un filtro pasabajos de  $\omega_c = \pi/2$ . De esta forma puede recuperarse intacto el espectro de la señal original.

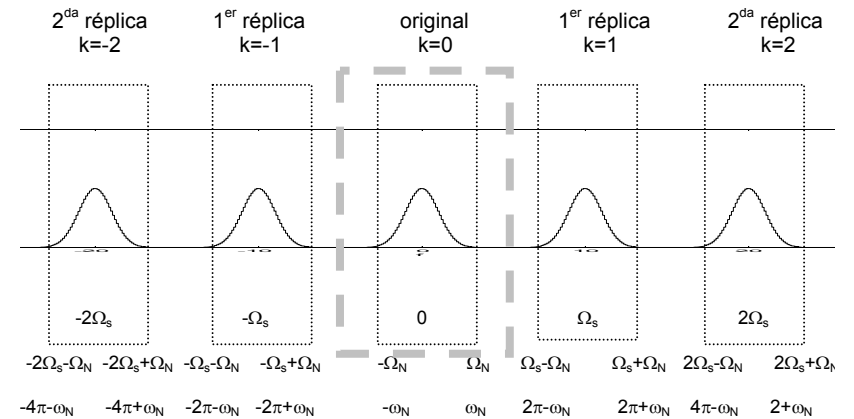


Fig. 5: Gráfica de la Transformada de Fourier de Tiempo Continuo de una señal muestreada coincidente con la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto amén de un cambio de escala.

Como la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto es periódica con período  $2\pi$  en la escala de  $\omega$  (con período 1 en la escala de  $f$ ), las réplicas de cada componente muestreada, aparecen cada  $\pm 2k\pi$  en dicha escala (cada  $\pm k$  en la escala de  $f$ ). Dividiendo esos valores por  $F_s$  puede obtenerse directamente el valor de la frecuencia de la señal de tiempo continuo que se recuperaría con reconstrucción ideal.

$$\begin{array}{ccc} \pm\omega_k = \pm\omega_0 \pm 2k\pi & \xleftrightarrow{\times T_s} & \pm\Omega_k = \pm\Omega_0 \pm k\Omega_s \\ \downarrow +2\pi & \leftrightarrow & \downarrow +2\pi \\ \pm f_k = \pm f_0 \pm k & & \pm F_k = \pm F_0 \pm kF_s \end{array}$$

Si se cumplen las hipótesis del teorema del muestreo, entonces las componentes originales caerán en el rango de  $\pm\pi$  en la escala de  $\omega$  ( $\pm \frac{1}{2}$  en la escala de  $f$ ) y podrán ser recuperadas intactas luego de una reconstrucción ideal. Así se obtiene:

- ...
- 2da réplica hacia abajo de la componente negativa:  $\omega_{-2}^- = \omega_0^- - 4\pi$
- 2da réplica hacia abajo de la componente positiva:  $\omega_{-2}^+ = \omega_0^+ - 4\pi$
- 1er réplica hacia abajo de la componente negativa:  $\omega_{-1}^- = \omega_0^- - 2\pi$
- 1er réplica hacia abajo de la componente positiva:  $\omega_{-1}^+ = \omega_0^+ - 2\pi$
- 1er réplica hacia arriba de la componente negativa:  $\omega_1^- = \omega_0^- + 2\pi$
- 1er réplica hacia arriba de la componente positiva:  $\omega_1^+ = \omega_0^+ + 2\pi$
- 2da réplica hacia arriba de la componente negativa:  $\omega_2^- = \omega_0^- + 4\pi$
- 2da réplica hacia arriba de la componente positiva:  $\omega_2^+ = \omega_0^+ + 4\pi$
- ...

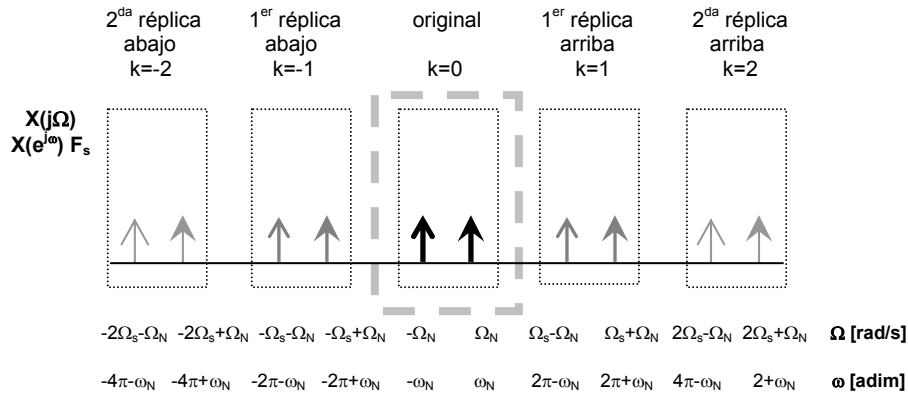


Fig. 6: Réplicas no solapadas del espectro de una señal senoidal muestreada correctamente.

Si no se cumplen las hipótesis del teorema del muestreo, entonces las componentes originales caerán por fuera del rango de  $\pm\pi$  en la escala de  $\omega$ . En su lugar, será un par de réplicas las que queden dentro del rango mencionado y éstas serán recuperadas luego de una reconstrucción ideal ocasionando un cambio de frecuencia.

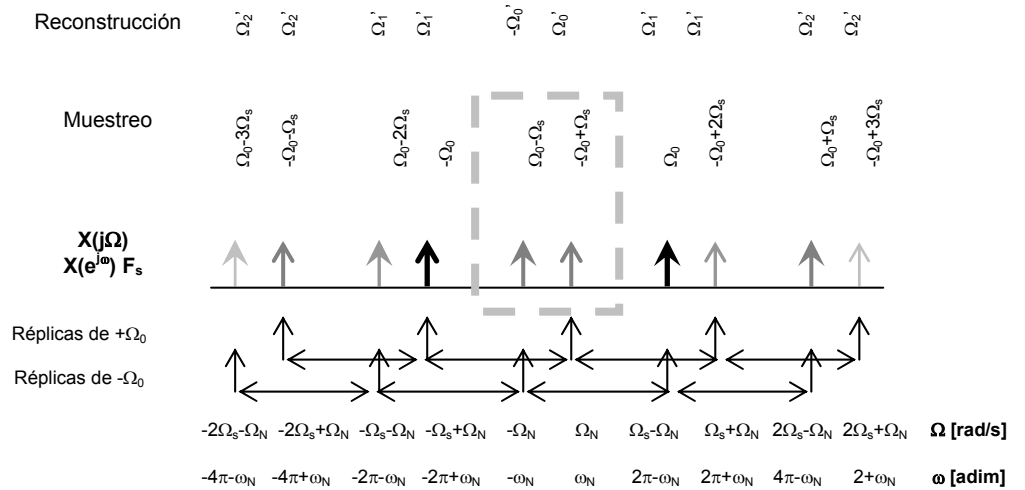


Fig. 7: Réplicas solapadas del espectro de una señal senoidal muestreada incorrectamente. El recuadro punteado indica las réplicas que serán reconstruidas, y por fuera de éste, resaltadas, las componentes originales que serán eliminadas.

# Resumen para ejercicios de laboratorio

## 1. Conversores A/D y D/A.

Los conversores A/D y D/A implementan físicamente los procesos de muestreo y reconstrucción, además de otros procesos, por diferentes métodos. Dichos conversores, constituyen la primer y la última etapa de una placa de tratamiento de señales que contenga un DSP dado que la mayoría de las señales de interés se encuentran en el dominio analógico.

Los conversores cuentan con un circuito de temporización interno o externo, sincronizado con el resto del sistema.

Habitualmente, poseen filtros pasabajos en la entrada, que eliminan las componentes de alta frecuencia que podrían producir réplicas indeseadas dentro del rango de interés; y en la salida, para la reconstrucción de las señales eliminando las réplicas del espectro.

Los conversores también pueden contener registros o memorias para la programación de las frecuencias de conversión y las de corte de los filtros. En general, también poseen algún sistema de comunicación o interfaz con los procesadores con quienes trabajan, para cargar los registros mencionados y realizar una operación coordinada con todo el sistema.

## 2. El TLC3204x.

Las placas para procesamiento digital de señales de los kits DSK de Texas Instruments cuentan con procesadores de la familia de TMS 320C3x y poseen un circuito integrado monolítico denominado Circuito de Interfaz Analógica AIC, fabricado en dos modelos, el TLC 32040 y el TLC 32041. Ambos tienen las siguientes características:

- ★ Conversores A/D y D/A
  - Resolución = 14 bits
  - Frecuencia de muestreo y reconstrucción variable hasta 19.2 MHz
  - Arquitectura que asegura la no pérdida de códigos y operación monótona
- ★ Filtros
  - Antisolapamiento pasabanda
  - Reconstructor pasabajos
  - De capacidades conmutadas
  - Frecuencia de corte superior programable
- ★ Dos microprocesadores compatibles con modo de puerto serie
- ★ Interfaz de comunicación
  - Puerto serie para interfaz directa al DSP TMS320 11/17/20/C25
  - Interfaz de puerto serie al registro de shifteo paralelo/serie SN74299 para interfaz paralela al TMS320 10/C25, etc.

## 3. Temporizador.

Para la temporización, se utiliza la señal de Master Clock proveniente del oscilador a cristal de la placa del DSP. La frecuencia provista es 6.25 MHz y queda definida por el TIMER0 del C'31. La frecuencia de Shift Clock es

$$F_{\text{Shift Clock}} = \frac{F_{\text{MasterClock}}}{4}$$

El Master Clock y los contadores XA determinan la frecuencia Switched Capacitor Filter Clock

$$F_{\text{SCF Clock}} = \frac{F_{\text{MasterClock}}}{2X_A}$$

Dicha frecuencia y los contadores XB determinan la frecuencia de muestreo de los conversores

$$F_{\text{conv}} = \frac{F_{\text{SCF Clock}}}{X_B}$$

## 4. Registros.

El contenido de los contadores RX controla la frecuencia del conversor A/D. El contenido de los contadores TX controla la frecuencia del conversor D/A.

Los registros RA, RA', RB, TA, TA' y TB cargan a los contadores en cada período. El AIC permite programar la temporización con desplazamientos sumando o restando los registros A con los A'.

La señal SCF Clock y los contadores XB manejan la frecuencia de conversión

$$F_{\text{conv}} = \frac{F_{\text{SCF Clock}}}{X_B}$$

## 5. Filtros programables.

El filtro antisolapamiento posee las siguientes características:

- ★ Chebishev/Elíptico transicional de 7° orden (pasa-bajos)
- ★ Chebishev/Elíptico transicional de 4° orden (pasa-altos)
- ★ Ecuador de 4° orden

- ★ Filtro continuo para eliminar cualquier posibilidad de solapamiento

El filtro reconstructor tiene las siguientes particularidades:

- ★ Chebishev/Elíptico transicional de 7º orden (pasa-bajos)
- ★ Ecuilizador de 4º orden
- ★ Filtro continuo para eliminar cualquier réplica posible

Las especificaciones de transferencia están calculadas para una frecuencia de Master Clock de 288 kHz. La frecuencia de corte superior es la  $F_{SCF\_Clock}$  escalada a 288 kHz

$$F_u = \frac{F_{normalizada[kHz]} F_{SCFClock}}{288kHz} = \frac{4kHz F_{SCFClock}}{288kHz}$$

## 6. Comunicación serie.

El AIC se comunica con el resto del sistema mediante un puerto serie de 16 bits. El protocolo establece una comunicación primaria, y otra secundaria a la cual se accede ajustando a 1 los dos bits menos significativos en la comunicación primaria. La comunicación primaria carga los valores para la conversión D/A y la secundaria carga los registros internos del A/D. El formato de la primaria es el siguiente

D15	D14	D13	D12	D11	D10	D9	D8	D7	D6	D5	D4	D3	D2	D1	D0
Valores de conversión D/A														Modo	



LSB	Modo
00	Contador A Tx ← TA, Contador A Rx ← RA Contador B Tx ← TB, Contador B Rx ← RB
01	Contador A Tx ← TA+TA', Contador A Rx ← RA+RA' Contador B Tx ← TB+TB', Contador B Rx ← RB+RB'
10	Contador A Tx ← TA-TA', Contador A Rx ← RA-RA' Contador B Tx ← TB, Contador B Rx ← RB
11	Contador A Tx ← TA, Contador A Rx ← RA Contador B Tx ← TB, Contador B Rx ← RB Después de 4 ciclos de Shift Clock se envía una comunicación secundaria

El formato de la secundaria es

D15	D14	D13	D12	D11	D10	D9	D8	D7	D6	D5	D4	D3	D2	D1	D0
X	X	Registro TA (sin signo)					X	X	Registro RA (sin signo)					0	0
X	Registro TA' (complemento a 2)						X	Registro RA' (complemento a 2)						0	1
X	Registro TB (sin signo)						X	Registro RB (sin signo)						1	0
X	X	X	X	X	X	X	X	Registro de control						1	1



D7 ~ D6	D5	D4	D3	D2
<b>Ganancia de entrada</b> 0 0 = 1X para ± 6V de entrada analógica 0 1 = 2X para ± 3V de entrada analógica 1 0 = 4X para ± 1.5V de entrada analógica 1 1 = 1X para ± 6V de entrada analógica	<b>Transmisión</b> 0 = asincrónico 1 = sincrónico	<b>Pines Aux In</b> 0 = deshabilitado 1 = habilitado	<b>Función loopback</b> 0 = deshabilitado 1 = habilitado	<b>Filtro pasabanda</b> 0 = deshabilitado 1 = habilitado