Transformada Discreta de Fourier

■ Ejemplos

Ejemplos de cálculo

1. Transformada Discreta de Fourier.

1. Convolución circular y lineal.

1. Para las secuencias x[n] y h[n]

1.1. Determinar las Transformadas Discretas de Fourier de las secuencias.

1.2. Obtener la convolución circular.

1.3. Calcular la longitud de la convolución lineal de las secuencias.

1.4. Obtener las secuencias modificadas para calcular la convolución lineal.

1.5. Calcular las Transformadas Discretas de Fourier de las secuencias modificadas.

1.6. Obtener la convolución lineal.

$$x[n]=\left\{\underset{\uparrow}{1};1;0\right\} \qquad h[n]=\left\{\underset{\uparrow}{1};0;\frac{1}{2}\right\}$$

Solución:

1.1. La Transformada Discreta de Fourier de las secuencias es

$$X[k]=\sum_{n=0}^{2}x[n]e^{-j\frac{2\pi kn}{3}}=1+e^{-j\frac{2}{3}\pi k}=\left\{2;\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

$$H[k]=\sum_{n=0}^{2}h[n]e^{-j\frac{2\pi kn}{3}}=1+\frac{1}{2}e^{-j\frac{4}{3}\pi k}=\left\{\frac{3}{2};\frac{3}{4}+j\frac{\sqrt{3}}{4};\frac{3}{4}-j\frac{\sqrt{3}}{4}\right\}$$

1.2. El producto de las dos transformadas es

$$Y[k]=X[k]H[k]=\left(1+e^{-j\frac{2\pi k}{3}}\right)\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\frac{4\pi k}{3}}\right)=\frac{3}{2}+e^{-j\frac{2\pi k}{3}}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{4\pi k}{3}}=\left\{3;\frac{3}{4}-j\frac{\sqrt{3}}{4};\frac{3}{4}+j\frac{\sqrt{3}}{4}\right\}$$

antitransformando, por la propiedad de convolución circular

$$y[n]=x[n]\otimes h[n]=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2}Y[k]e^{j\frac{2\pi kn}{3}}=\left\{\frac{3}{2};1;\frac{1}{2}\right\}$$

1.3. La longitud de la convolución lineal de las secuencias es

$$\ell\{x[n]*h[n]\}=\ell\{x[n]\}+\ell\{h[n]\}-1$$

1.4. Las secuencias deben modificarse agregando tantos ceros como sea necesario para que su longitud concuerde con la de la convolución lineal

$$\hat{x}[n]=\left\{\underset{\uparrow}{1};1;0;0;0\right\} \qquad \hat{h}[n]=\left\{\underset{\uparrow}{1};0;\frac{1}{2};0;0\right\}$$

1.5. La Transformada Discreta de Fourier de las secuencias modificadas es

$$\widehat{X}[k]=\sum_{n=0}^{4}x[n]e^{-j\frac{2\pi kn}{5}}=1+e^{-j\frac{2}{5}\pi k}=\left\{1;1+e^{-j\frac{2}{5}\pi};1+e^{-j\frac{4}{5}\pi};1+e^{-j\frac{6}{5}\pi};1+e^{-j\frac{8}{5}\pi k}\right\}$$

$$\widehat{H}[k]=\sum_{n=0}^{4}h[n]e^{-j\frac{2\pi kn}{5}}=1+\frac{1}{2}e^{-j\frac{4}{5}\pi k}=\left\{1;1+\frac{1}{2}e^{-j\frac{4}{5}\pi};1+\frac{1}{2}e^{-j\frac{8}{5}\pi};1+\frac{1}{2}e^{-j\frac{12}{5}\pi};1+\frac{1}{2}e^{-j\frac{4}{5}\pi k}\right\}$$

1.6. El producto de las transformadas es

$$\widehat{Y}[k]=\widehat{X}[k]\widehat{H}[k]=\left(1+e^{-j\frac{2}{5}\pi k}\right)\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\frac{4}{5}\pi k}\right)=1+e^{-j\frac{2}{5}\pi k}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{4}{5}\pi k}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{6}{5}\pi k}$$

antitransformando, se obtiene la convolución circular de las secuencias modificadas, que es igual a la convolución lineal de las secuencias originales

$$\hat{y}[n]=\hat{x}[n]\otimes\hat{h}[n]=x[n]*h[n]=\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4}\widehat{Y}[k]e^{j\frac{2\pi kn}{5}}=\left\{\underset{\uparrow}{1};1;\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right\}$$

2. Solapamiento en el tiempo.

2. Considerar la secuencia temporal $x[n]=0.5^n u[n]$.

2.1. Determinar $X(e^{j\omega})$.

2.2. Determinar la secuencia $X[k]\equiv X(e^{j\omega})\big|_{\omega=2\pi k/4}$ para k=0;1;2;3.

2.3. Si la secuencia obtenida en el punto anterior fueran los coeficientes de una Transformada Discreta de Fourier, determinar la secuencia temporal que se deriva de dicha secuencia.

2.4. Comparar la secuencia obtenida con x[n] y justifique el resultado.

Solución:

2.1. La Transformada de Fourier de Tiempo Discreto es

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{2}{2-e^{-j\omega}}$$

2.2. La secuencia obtenida para $\omega=2\pi k/4$ con k=0;1;2;3 es

$$X[k]=\left.\frac{2}{2-e^{-j\omega}}\right|_{\omega=\frac{2\pi k}{4}} \Rightarrow X[0]=2 \ ; \ X[1]=\frac{2}{2+j} \ ; \ X[2]=\frac{2}{3} \ ; \ X[3]=\frac{2}{2-j}$$

2.3. La secuencia temporal que generaría X[k] es

$$\hat{x}[n]=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\frac{2e^{-j\frac{2\pi kn}{4}}}{2-e^{-j\frac{2\pi k}{4}}} \Rightarrow \hat{x}[n]=\frac{16}{15} \ ; \ \hat{x}[n]=\frac{8}{15} \ ; \ \hat{x}[n]=\frac{4}{15} \ ; \ \hat{x}[n]=\frac{2}{15}$$

2.4. La transformada inversa de X[k] es diferente de x[n] porque existe solapamiento a nivel temporal ya que $x[n]\neq 0$ para n>N

$$\hat{x}[n]=\frac{x[n]}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{4}}\neq x[n]$$

3. Determinar la Transformada Discreta de Fourier de orden N de la secuencia

$$x[n]=e^{j\omega n}; \quad 0\leq n\leq N-1 \quad \text{con} \quad \omega\neq\frac{2\pi k}{N} \qquad \forall k/ \quad 0\leq k\leq N-1$$

Solución: Si $\omega=2\pi m/N$ con $m\in Z$ entonces $X[k]=0$ $\forall k\neq m$ y $X[m]=N$. En caso contrario

$$X[k]=e^{j\left[\frac{\omega(N-1)}{2}+\frac{\pi k}{N}\right]}\frac{\operatorname{sen}\left[\frac{\omega N}{2}\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)\right]}$$

Ejemplos de simulación

1. Transformada Discreta de Fourier.

1.1. Simular el ejercicio de cálculo referido a la convolución de secuencias.

Solución:

```
%Programa para calculo y grafica de la TDF de una senal y un sistema
%Ejemplo de Simulacion 1.: Convolucion lineal y circular
clc, clear, close all

%Secuencias
xn(1)=1;xn(2)=-1;
hn(1)=-1;hn(2)=1;

%Secuencias modificadas
Lx=length(xn);
Lh=length(hn);
L=Lx+Lh-1;
xmn=xn;xmn(Lx+1:L)=0;
hmn=hn;hmn(Lh+1:L)=0;

%Escala de tiempo discreto y frecuencias
n=0:max(Lx,Lh)-1;
k=0:max(Lx,Lh)-1;
m=0:L-1;
q=0:L-1;

%TDFs de las secuencias
Xk=fft(xn,Lx);
Hk=fft(hn);

%TDF de la convolucion circular
Yk=Xk.*Hk;

%Convolucion circular
yn=ifft(Yk,max(Lx,Lh));

%TDFs de las secuencias modificadas
Xmk=fft(xmn,L);
Hmk=fft(hmn,L);

%TDF de la convolucion lineal
Ymk=Xmk.*Hmk;

%Convolucion lineal
ymn=ifft(Ymk,L);

%Graficos
%Secuencias
figure(1)
subplot(2,3,1)
stem(n,xn,'r.-')
xlabel('n')
ylabel('x[n]')
title('Secuencia')
subplot(2,3,2)
stem(n,hn,'k.-')
xlabel('n')
ylabel('h[n]')
title('Secuencia')
subplot(2,3,3)
stem(n,yn,'b.-')
xlabel('n')
ylabel('y[n]')
title('Convolucion circular')
%Modulo de las TDFs
subplot(2,3,4)
stem(k,Xk,'r.-')
xlabel('k')
ylabel('X[k]')
title('Transformada de la secuencia')
subplot(2,3,5)
stem(k,Hk,'k.-')
xlabel('k')
ylabel('H[k]')
title('Transformada de la secuencia')
subplot(2,3,6)
stem(k,Yk,'b.:')
xlabel('k')
ylabel('Y[k]')
title('Transformada de la convolucion circular')
%Secuencias modificadas
figure(2)
subplot(2,3,1)
stem(m,xmn,'r.-')
xlabel('n')
ylabel('xm[n]')
title('Secuencia modificada')
subplot(2,3,2)
stem(m,hmn,'k.-')
```

```
xlabel('n')
ylabel('hm[n]')
title('Secuencia modificada')
subplot(2,3,3)
stem(m,ymn,'b.-')
xlabel('n')
ylabel('ym[n]')
title('Convolucion lineal')
%Modulo de las TDFs de las secuencias modificadas
subplot(2,3,4)
stem(q,Xmk,'r.-')
xlabel('k')
ylabel('Xm[k]')
title('Transformada de la secuencia modificada')
subplot(2,3,5)
stem(q,Hmk,'k.-')
xlabel('k')
ylabel('Hm[k]')
title('Transformada de la secuencia modificada')
subplot(2,3,6)
stem(q,Ymk,'b.:')
xlabel('k')
ylabel('Ym[k]')
title('Transformada de la convolucion lineal')
```