

# 2 transformada discreta de fourier

resumen, ejemplos y ejercicios



# Transformada Discreta de Fourier

## Resumen

### Resumen para ejercicios de cálculo

#### 1. Definición.

Para una función matemática  $x[n]$  de variable independiente discreta  $n$  de longitud finita con  $L$  muestras, se define la Transformada Discreta de Fourier, como otra función  $X[k]$  de variable independiente discreta  $k$  y  $N$  muestras, con  $N \geq L$

$$TDF\{x[n]\} = X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} ; k = 0; 1; \dots; N-1$$

En el mismo sentido, la transformada inversa se define como

$$TDF^{-1}\{X[k]\} = x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi kn}{N}} ; n = 0; 1; \dots; N-1$$

Para una secuencia  $x[n]$  finita de longitud  $L$ , la transformada  $X[k]$  puede interpretarse como el muestreo de un período de la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto  $X(e^{j\omega})$  tomando  $N \geq L$  muestras equiespaciadas a intervalos  $\delta\omega = 2\pi/N$ . Si la secuencia representa una señal de tiempo discreto (o la respuesta impulsiva de un sistema), esta transformada es una colección numerable de los valores de su espectro (o respuesta espectral) elegidos en forma equiespaciada en la escala de frecuencia angular.

$$X[k] \equiv \frac{1}{N} X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi k}{N}} ; k = 0; 1; \dots; N-1$$

También puede hacerse otra interpretación considerando una extensión periódica de  $x[n]$  replicando sus muestras con un período  $N \geq L$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n - Nl]$$

La secuencia periódica puede descomponerse en una Serie Discreta de Fourier cuyos coeficientes  $c_k$  son iguales a los valores de  $X[k]$

$$X[k] \equiv c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} ; k = 0; 1; \dots; N-1$$

De esta forma puede considerarse que  $X[k]$  representa los componentes armónicos de la secuencia que se obtendría de replicar con período  $N$  a la secuencia  $x[n]$  finita de  $L$  muestras, con  $N \geq L$ .

Intuitivamente puede considerarse que una secuencia limitada en el tiempo contiene una cantidad limitada de información, de la misma manera que una secuencia periódica. Por eso, su espectro puede representarse con una cantidad numerable de valores. Si la transformada se toma con un número  $N < L$ , se puede esperar un error al antitransformar por el solapamiento temporal, del mismo modo que se da en el muestreo de señales con el solapamiento de frecuencias de señales de banda no limitada.

#### 2. Propiedades.

Las propiedades más importantes de la Transformada Discreta de Fourier son

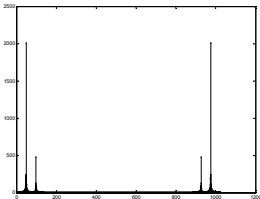
| Propiedad                         | Descripción   |
|-----------------------------------|---|
| Linealidad                        | $c_1 X_1[n] + c_2 X_2[n] \xleftrightarrow{TDF} c_1 X_1[k] + c_2 X_2[k]$                               |
| Reflexión Circular                | $x[-n]_N \xleftrightarrow{TDF} X[-k]_N$   |
| Desplazamiento Circular Temporal  | $x[n-l]_N \xleftrightarrow{TDF} X[k] e^{-j\frac{2\pi kl}{N}}$   |
| Desplazamiento Circular Espectral | $x[n] e^{j\frac{2\pi ln}{N}} \xleftrightarrow{TDF} X[k-l]_N$  |
| Convolución Circular              | $x_1[n] \otimes x_2[n] \xleftrightarrow{TDF} X_1[k] X_2[k]$   |
| Correlación Circular              | $x_1[n] \star x_2[n] \xleftrightarrow{TDF} X_1[k] X_2^*[k]$   |
| Modulación                        | $x_1[n] x_2[n] \xleftrightarrow{TDF} \frac{1}{N} X_1[k] \otimes X_2[k]$                               |
| Conjugación                       | $x^*[n] \xleftrightarrow{TDF} X^*[N-k]$   |
| Teorema de Parseval               | $\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] x_2^*[n] \xleftrightarrow{TDF} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1[k] X_2^*[k]$ |

Tabla 1: Propiedades de la Transformada Discreta de Fourier.

# Ayuda para ejercicios de simulación

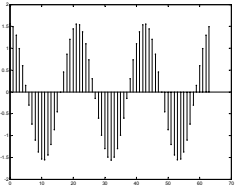
## fft

Transformada Rápida de Fourier unidimensional

|  |   |
|--|---|
| <p><b>Sintaxis</b></p> <p><code>X = fft(x,N,dim)</code></p> <p><b>x:</b> arreglo<br/> <b>N:</b> número de puntos<br/> <math>L\{x\}=N</math> (por defecto <math>L\{x\}</math>)<br/> <b>dim:</b> dimensión sobre la que se aplica</p> <p><b>Algoritmo</b></p> $X[k] = \sum_{n=1}^N x[n] e^{-j \frac{2\pi[k-1][n-0]}{N}}$ | <p><b>Ejemplos</b></p> <pre>N=1024; n = 0:N-1; k = 0:N-1; x = 4*sin(0.3*n) + sin(0.6*n) X = fft(x); stem(k,abs(X), 'k.-')</pre>  |
|--|---|

## ifft

Antitransformada Rápida de Fourier unidimensional

|  |  |
|--|--|
| <p><b>Sintaxis</b></p> <p><code>x = ifft(X,N,dim)</code></p> <p><b>x:</b> arreglo<br/> <b>N:</b> cantidad de puntos<br/> <math>L\{x\}=N</math> (por defecto <math>L\{X\}</math>)<br/> <b>dim:</b> dimensión sobre la que se aplica</p> <p><b>Algoritmo</b></p> $x[k] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X[k] e^{j \frac{2\pi[k-1][n-0]}{N}}$ | <p><b>Ejemplos</b></p> <pre>N=64; n = 0:N-1; k1=N/16; X = zeros(N,1); X(k1)=100; x = ifft(X); stem(n,x, 'k.-')</pre>  |
|--|--|

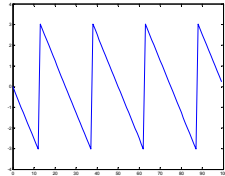
## fftshift, ifftshift

Mueve la componente de frecuencia cero al centro del espectro

|   |   |
|---|---|
| <p><b>Sintaxis</b></p> <p><code>Y = fftshift(X,dim)</code></p> <p><b>X:</b> arreglo<br/> <b>dim:</b> dimensión sobre la que se aplica</p> <p><b>Algoritmo</b></p> <p>Para vectores, <code>fftshift</code> enroca la mitad izquierda de <code>x</code> con la derecha. Para matrices, troca el primer y tercer cuadrante con el segundo y cuarto. Para arreglos, cambia cada semiespacio a lo largo de cada dimensión.</p> | <p><b>Sintaxis</b></p> <p><code>X = ifftshift(Y,dim)</code></p> <p><b>X:</b> arreglo<br/> <b>dim:</b> dimensión sobre la que se aplica</p> <p><b>Algoritmo</b></p> <p>Deshace el resultado de <code>fftshift</code></p> |
|---|---|

## unwrap

Corrige ángulos de fase

|  |  |
|--|--|
| <p><b>Sintaxis</b></p> <p><code>Q = unwrap(P,tol,dim)</code></p> <p><b>P:</b> arreglo<br/> <b>tol:</b> tolerancia de salto (por defecto <math>\pi</math>)<br/> <b>dim:</b> dimensión sobre la que se aplica</p> <p><b>Algoritmo</b></p> <p>Suma <math>\pm 2k\pi</math> cuando ocurren saltos absolutos mayores a <math>\pi</math> entre dos elementos consecutivos de <code>P</code></p> | <p><b>Sintaxis</b></p> <pre>N=100;n=0:N-1; h=zeros(N,1); h(5)=1; H=fftshift(fft(h)); plot(n,angle(H)) plot(n,unwrap(angle(H)))</pre>  |
|--|--|

# Ayuda para ejercicios de laboratorios

## Analizador de Espectro

### 1. Generalidades.

Un analizador de espectro es un instrumento que permite visualizar las componentes espectrales de una señal. Habitualmente tiene los siguientes controles:

- ★ START/STOP
- ★ Canales: A, B
- ★ Vertical:
  - Referencia: -200 dB ~ +140 dB
  - Rango: 2.5 dB/div, 5 dB/div, 7.5 dB/div, 10 dB/div, 12.5 dB/div, 15 dB/div, 17.5 dB/div, 20 dB/div
- ★ Horizontal:
  - Magnitud: 62.5 Hz/div, 125 Hz/div, 250 Hz/div, 500 Hz/div, 1000 Hz/div, 2000 Hz/div
  - Posición: -500000 Hz ~ +520000 Hz
- ★ Accesorios:
  - Filtros
  - Promediado/Pico
  - Composición espectral: THD/IMD
- ★ Scale: Lin, Log

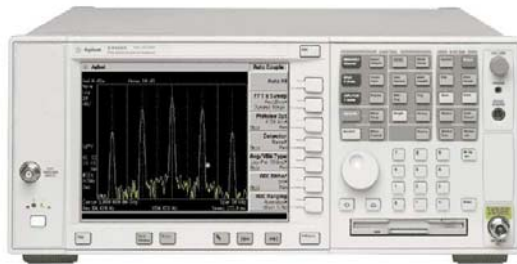


Fig. 1.: Vista del panel frontal de un analizador de espectro digital.

### 2. DazyWeb Laboratories SA-3002 PC Spectrum Analyzer.

Es un programa para PC de uso libre que realiza el análisis espectral de señales en el rango de audio calculando la FFT de la señal. Utiliza la placa de sonido full duplex de la computadora y forma un lazo entre la entrada de línea o micrófono y la salida de línea. En general, permite utilizar otros programas que requieran la placa de sonido aunque pueden ocurrir conflictos.

Se instala manualmente copiando el archivo ejecutable en un directorio. Para desinstalarse, basta con borrar dicho archivo. Puede requerirse un control OCX (COMDLG32.OCX) incluido en el archivo zip (si no funciona, se puede copiarlo dentro de la carpeta Windows/System con los otros OCX's). Es necesaria la Visual Basic 6 runtime library (MSVBVM60.DLL) provista con Windows 98 o sistema posterior y disponible en simtel.net para Windows 95.

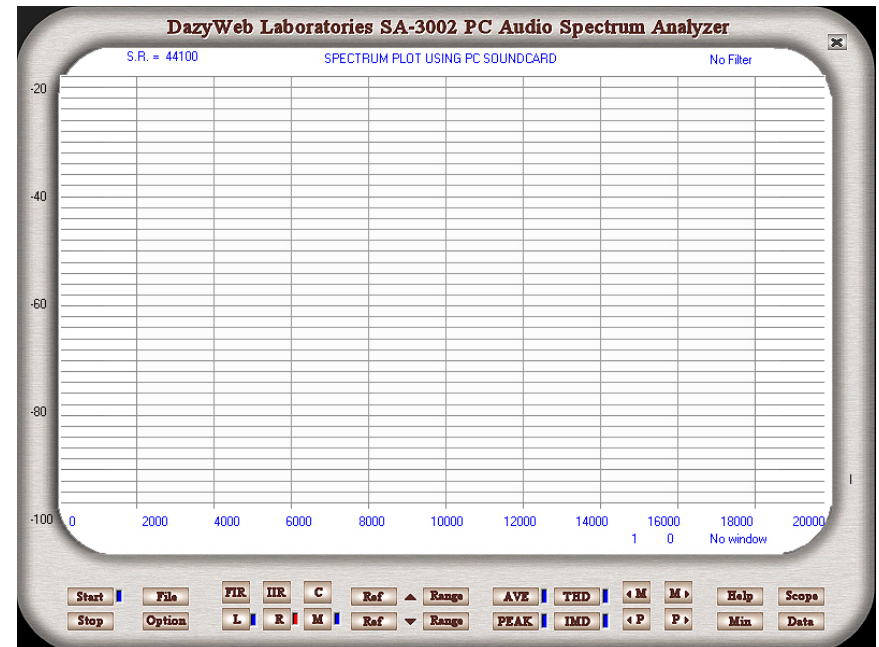


Fig. 2: Vista del panel frontal de un analizador de espectro virtual DazyWeb Laboratories SA-3002.

| Descripción          | Control    | Opciones o rango   |
|----------------------|------------|--|
| Barrido              | START/STOP |  |
| Filtros              | FIR/IIR/C  | FIR, IIR y borrado   |
| Canales              | L/R/M      | lqz y der (8 kmuestras) y mono der (16 kmuestras)  |
| Referencia Vertical  | Ref        | -200 dB ~ +140 dB  |
| Rango Vertical       | Range      | 2.5 dB/div, 5 dB/div, 7.5 dB/div, 10 dB/div, 12.5 dB/div, 15 dB/div, 17.5 dB/div, 20 dB/div  |
| Promediador/Pico     | AVE/PEAK   |  |
| Composición spectral | THD/IMD    |  |
| Horizontal Magnitud  | M          | 62.5 Hz/div, 125 Hz/div, 250 Hz/div, 500 Hz/div, 1000 Hz/div, 2000 Hz/div  |
| Horizontal Posición  | P          | -500000 Hz ~ +520000 Hz  |
| Ayuda                | Help       |  |
| Osciloscopio         | Scope      |  |
| Datos                | Data       |  |
| Manejo de Archivo    | FILE       | Load Spectra File / Save Spectra File<br>Load FIR Coeficients / Load IIR Coeficients<br>Copy to Clipboard<br>Save as BMP<br>Load WAV file / Play WAV file / Stop WAV file<br>Reset<br>Plot to Printer<br>Plotwidth: Narrow, Wide<br>Exit                       |
| Opciones             | OPTION     | Sample Rate: 44100, 22050, 11025<br>Window: None, Hamming<br>Filter: No Filter, A-Weight, BP 30 Tap, 1 k R Notch, FIR Ext User,<br>500 Hz HP, IIR Ext User<br>Data Lock: Peak Freq, 60Hz<br>Scale: Lin, Log<br>Cal Offset/Cal Engage/Harmonic Display: Off, On |

Tabla 1: Controles del analizador de espectro virtual DazyWeb Laboratories SA-3002