Transformada Z

Ejemplos

Ejemplos de cálculo

1. Transformada Z.

1.1. Calcular la transformada Z, por definición, indicando la región de convergencia

$$h_1[n] = p^n u[n]$$
$$h_2[n] = -p^n u[-n-1]$$
$$x[n] = \cos\left[\frac{\pi}{2}n\right]u[n]$$

Solución: Para calcular la Transformada Z por definición, resulta útil recordar el desarrollo de la serie geométrica y las condiciones de convergencia de la misma.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} = 1+\alpha+\alpha^2+\ldots \quad si \quad |\alpha|<1$$

En base al resultado anterior, pueden calcularse las series con distintos límites inferiores o superiores de las sumatorias, restando los términos que correspondan en cada caso

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n = \alpha+\alpha^2+\ldots = \frac{1}{1-\alpha}-1 = \frac{\alpha}{1-\alpha} \quad si \quad |\alpha|<1$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\alpha^n = \frac{\alpha^2}{1-\alpha} \quad si \quad |\alpha|<1$$

$$\vdots$$

$$\sum_{n=N}^{\infty}\alpha^n = \frac{\alpha^N}{1-\alpha} \quad si \quad |\alpha|<1$$

$$\vdots$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n - \sum_{n=N}^{\infty}\alpha^n = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} \quad si \quad |\alpha|<1$$

Para el primer ejemplo

$$H_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p^n u[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} p^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(pz^{-1}\right)^n$$

Considerando el resultado de la serie geométrica para n desde 0 a ∞ y tomando $\alpha=pz^{-1}$

$$H_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(pz^{-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{1-pz^{-1}}$$

Esta serie converge para $|\alpha|<1$, es decir, $|pz^{-1}|<1$, o bien, $|p|<z$

$$\therefore H_1(z) = \frac{1}{1-pz^{-1}} \quad ; \quad p<|z|$$

donde p es una raíz del denominador o polo de $H_1(z)$. Para el segundo ejemplo

$$H_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_2[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -p^n u[-(n+1)]z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{1} p^n z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{1}\left(pz^{-1}\right)^n = -\sum_{m=1}^{\infty}\left(p^{-1}z\right)^m$$

donde se hizo el cambio de variable m=-n con el correspondiente cambio en los límites de la sumatoria. Considerando la serie geométrica para n desde 1 a ∞ y tomando $\alpha=p^{-1}z$

$$H_2(z) = -\sum_{m=1}^{\infty}\left(p^{-1}z\right)^m = -\sum_{m=1}^{\infty}\alpha^m = -\frac{\alpha}{1-\alpha} = -\frac{p^{-1}z}{1-p^{-1}z} = \frac{1}{1-pz^{-1}}$$

Esta serie converge para $|\alpha|<1$, es decir, $|p^{-1}z|<1$, o bien, $z<|p|$

$$\therefore H_2(z) = \frac{1}{1-pz^{-1}} \quad ; \quad |z|<p$$

donde p es una raíz del denominador o polo de $H_2(z)$. Obsérvese que $H_1(z)$ y $H_2(z)$ tienen la misma expresión y por ende, el mismo polo, pero las regiones de convergencia son opuestas. Puede observarse que la Región de Convergencia está limitada por circunferencias del tipo $|z|=p$. Son las condiciones de convergencia de la sumatoria las que imponen la forma de dicha ROC (si es el interior o el exterior de la circunferencia mencionada). Para el tercer ejemplo

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos\left[\frac{\pi}{2}n\right]u[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\cos\left[\frac{\pi}{2}n\right]z^{-n}$$

Escribiendo al coseno con la forma de Euler y calculando las series geométricas

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{j\frac{\pi}{2}n}+e^{-j\frac{\pi}{2}n}}{2}z^{-n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}e^{j\frac{\pi}{2}n}z^{-n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-j\frac{\pi}{2}n}z^{-n} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{j\frac{\pi}{2}}z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-j\frac{\pi}{2}}z^{-1}}$$

Finalmente

$$X(z)=\frac{1}{1+z^{-2}} \quad ; \quad |z|>1$$

1.2. Calcular la transformada Z de las secuencias utilizando las propiedades

$$x_1[n]=\cos\left[\frac{\pi}{2}(n-3)\right]u[n-3] \qquad x_2[n]=\cos\left[-\frac{\pi}{2}n\right]u[-n] \qquad x_3[n]=\left[\frac{1}{4}\right]^n\cos\left[\frac{\pi}{2}n\right]u[n]$$

Solución: Utilizando la propiedad de desplazamiento en el tiempo

$$X_1(z)=\frac{z^{-3}}{1+z^{-2}} \quad ; \quad 1<|z|<\infty$$

Utilizando la propiedad de reflexión

$$X_2(z)=\frac{1}{1+z^{2}} \quad ; \quad |z|<1$$

Utilizando la propiedad de escalado en el dominio Z

$$X_3(z)=\frac{1}{1+(4z)^{-2}}=\frac{1}{1+\frac{1}{16}z^{-2}} \quad ; \quad \frac{1}{4}<|z|$$

2. Antitransformada Z.

2.1. Determinar la secuencia unilateral derecha x[n] calculando la antitransformada de X(z)

2.1.1. Utilizando la propiedad de diferenciación en el dominio Z.

2.1.2. Por desarrollo en series de potencias.

2.1.3. Por expansión en serie de $z^{\pm 1}$ mediante división decreciente de polinomios.

$$\mathrm{X(z)}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$$

Solución: 2.1.1. Utilizando una función auxiliar W(z) con $W^2(z)=X(z)$

$$W(z)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}\overset{Z}{\leftrightarrow}w[n]=\left[\frac{1}{2}\right]^n u[n]$$

por propiedad de diferenciación en la frecuencia

$$-z\frac{\partial W(z)}{\partial z}=\frac{1}{2}z^{-1}\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{-2}\overset{Z}{\leftrightarrow}nw[n]=n\left[\frac{1}{2}\right]^n u[n]$$

Si a la función anterior la llamamos $V(z)=-z\partial W(z)/\partial z$, entonces X(z) puede escribirse en la forma X(z)=2zV(z), y por propiedad del desplazamiento en el tiempo

$$X(z)=2zV(z)\overset{Z}{\leftrightarrow}x[n]=2v[n+1]=2[n+1]\left[\frac{1}{2}\right]^{n+1}u[n+1]$$

2.1.2. Tomando una variable intermedia v

$$v=\frac{1}{2}z^{-1}\Rightarrow X(v)=\frac{1}{(1-v)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^{(n)}(0)v^n}{n!}\Rightarrow\begin{cases}X(0)=1\\ X'(0)=2\\ X''(0)=6\\ X^{(n)}(0)=(n+1)!\end{cases}\Rightarrow X(v)=\sum_{n=0}^{\infty}[n+1]v^n$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}[n+1]\left[\frac{1}{2}\right]^n z^{-n}\overset{Z}{\leftrightarrow}x[n]=[n+1]\left[\frac{1}{2}\right]^n u[n+1]$$

2.1.3. Calculando el binomio al cuadrado en el denominador y dividiendo

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}=1+z^{-1}+\frac{3}{4}z^{-2}+\frac{4}{8}z^{-3}+\frac{5}{16}z^{-4}+\ldots+[n+1]\left[\frac{1}{2}\right]^n z^{-2}+\ldots$$

$$\Rightarrow X(z)=\sum_{n=1}^{\infty}[n+1]\left[\frac{1}{2}\right]^n z^{-n}\overset{Z}{\leftrightarrow}x[n]=[n+1]\left[\frac{1}{2}\right]^n u[n+1]$$

3. Característica de los sistemas de tiempo discreto.

3.1. Calcular H(z) para determinar la cantidad de retardos que requeriría la implementación de un oscilador discreto cuya respuesta impulsiva sea

$$h[n] = \{\underset{\uparrow}{1},2,3,1,2,3,\ldots\}$$

Solución: h[n] toma los siguientes valores para $0 \le n \le 2$

$$si \quad 0 \le n \le 2 \quad \Rightarrow \quad h[n] = \delta[n] + 2[n-1] + 3[n-2] = \begin{cases} 1 & si \quad n=0 \\ 2 & si \quad n=1 \\ 3 & si \quad n=2 \end{cases}$$

Para n>2, h[n]=h[n-3]. Entonces la respuesta impulsiva puede expresarse en forma recursiva

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + h[n-3]$$

Su transformada puede escribirse como producto de términos que representan dos sistemas $H_1(z)$ y $H_2(z)$ en cascada, el primero con un retardo (z^{-3}) y el segundo con dos (z^{-1} y z^{-2})

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + 3z^{-1}}{1 - z^{-3}} = \frac{1}{1 - z^{-3}}\left(1 + 2z^{-1} + 3z^{-1}\right) = H_1(z)H_2(z)$$

3.2. Un promediador móvil de L puntos es definido por la ecuación en diferencias siguiente. Determinar un sistema recursivo equivalente.

$$y[n] = \frac{1}{L}\left(x[n] + x[n-1] + \ldots + x[n-L+1]\right)$$

Solución: Calculando la transformada Z de y[n]

$$Y(z) = X(z)\frac{1}{L}\left[1 + z^{-1} + \ldots + z^{-L+1}\right]$$

La transferencia del sistema, es la relación entre la salida y la entrada expresada en el dominio z

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{L}\left[1 + z^{-1} + \ldots + z^{-L+1}\right]$$

El polinomio entre corchetes es una serie de potencias de z^{-i} para i=0 hasta L-1, por lo que H(z) también puede escribirse usando la expresión de la serie

$$H(z) = \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{L-1} z^{-i} = \frac{1}{L}\frac{1 - z^{-L}}{1 - z^{-1}}$$

Inicialmente, se partió de un polinomio H(z) y se llegó a una expresión racional polinómica equivalente. Esto indica que H(z) representa a un sistema no recursivo que puede realizarse también mediante un sistema recursivo equivalente. Factorizando la última expresión racional polinómica se obtienen las raíces del numerador que son los ceros del sistema, y las raíces del denominador que son los polos del sistema: un cero de orden L en z=1, un polo de orden 1 en z=1 y otro de orden L-1 en z=0. Puede observarse que la cancelación entre polo y cero en z=1 conduce a la expresión original

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{L-1} z^{-i} = \frac{1}{L}\frac{1 - z^{-L}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{L}\frac{z^{L} - 1}{z^{L-1}(z-1)} \Rightarrow \begin{cases} z_1^{(L)} = 1 \\ p_1^{(1)} = 1 \\ p_2^{(L-1)} = 0 \end{cases}$$

Antitransformando la expresión inicial que expresa la relación entre y[n] y x[n] en el dominio z, se puede obtener la ecuación en diferencias del sistema no recursivo

$$Y(z) = \frac{1}{L}X(z)\left[1 + z^{-1} + \ldots + z^{-L+1}\right] \overset{z}{\leftrightarrow} y[n] = \frac{1}{L}\left(x[n] + x[n-1] + \ldots + x[n-L+1]\right)$$

De la última expresión obtenida para la transferencia H(z) puede despejarse la relación entre y[n] y x[n] en el dominio z

$$H(z) = \frac{1}{L}\frac{1 - z^{-L}}{1 - z^{-1}} \Rightarrow Y(z)\left(1 - z^{-1}\right) = \frac{1}{L}X(z)\left(1 - z^{-L}\right)$$

Procediendo del mismo modo con la última expresión se llega a obtener la ecuación en diferencias del sistema con recursividad

$$Y(z)\left(1 - z^{-1}\right) = \frac{1}{L}X(z)\left(1 - z^{-L}\right) \overset{z}{\leftrightarrow} y[n] - y[n-1] = \frac{1}{L}\left(x[n] - x[n-L]\right)$$

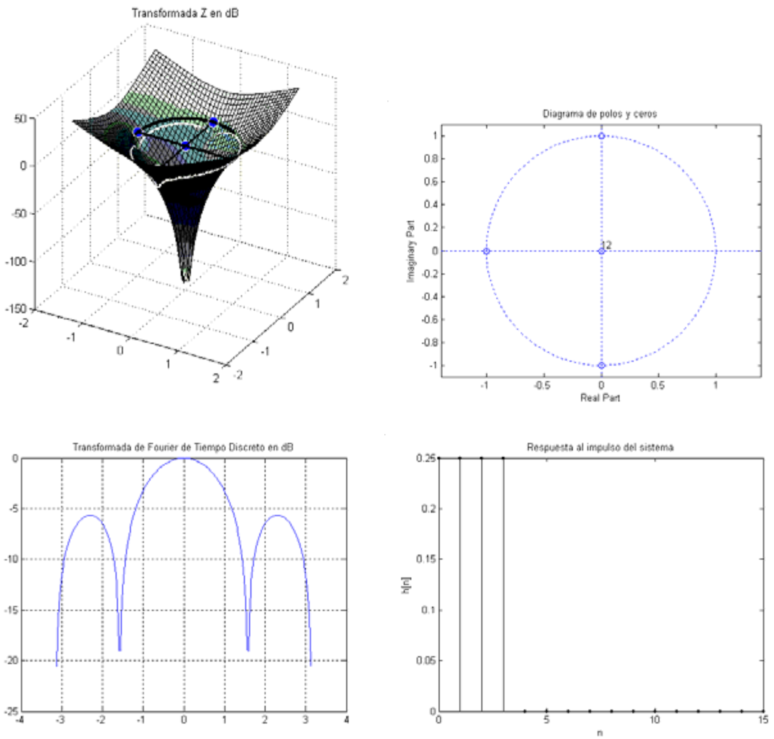

Figura 1: Transformada Z, diagrama de polos y ceros, respuesta espectral y respuesta impulsiva de un sistema promediador móvil de orden N=3 (L=4 puntos).

3.3. Diseñar un sistema causal que, ante la entrada x[n] siguiente, elimine las dos primeras componentes ($\omega=\pm\pi/2$ y $\omega=\pm 3\pi/4$) y deje inalterada la magnitud de la tercera ($\omega=\pm\pi$) pudiendo sufrir un desplazamiento de fase

$$x[n] = \cos\left[\frac{\pi n}{2}\right] + \cos\left[\frac{3\pi n}{4}\right] + \cos[\pi n]$$

Solución: La función de transferencia del sistema se puede componer partiendo de los ceros y polos deseados. Los ceros deben situarse en las frecuencias angulares a suprimir.

Escribiendo a z en la forma fasorial $z=e^{j\omega}$, como deben suprimirse dos frecuencias angulares, debe haber dos pares complejos conjugados de ceros

$$C_{1,2} = e^{\pm j\frac{\pi}{2}} \quad ; \quad C_{3,4} = e^{\pm j\frac{3\pi}{4}}$$

Con estos ceros se puede componer el numerador N(z) de la función de transferencia H(z)

$$N(z) = k\left(z - e^{j\frac{\pi}{2}}\right)\left(z - e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)\left(z - e^{j\frac{3\pi}{4}}\right)\left(z - e^{-j\frac{3\pi}{4}}\right) =$$

$$= k\left(z^2+1\right)\left(z^2+\sqrt{2}z+1\right) = k\left(z^4+\sqrt{2}z^3+2z^2+\sqrt{2}z+1\right)$$

Como el numerador es un polinomio de orden 4, para que el sistema sea causal, el denominador debe ser un polinomio de mayor o igual grado. Para no modificar la respuesta, el denominador puede componerse por un polo de orden 4 situado en z=0

$$D(z) = z^{-4}$$

Escribiendo a H(z) como el cociente de los polinomios mencionados

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = k\frac{1+\sqrt{2}z^{-1}+2z^{-2}+\sqrt{2}z^{-3}+z^{-4}}{z^{-4}}$$

El fasor $z=e^{j\omega}$ puede considerarse como un número complejo de módulo unitario. La tercer componente tiene frecuencia angular digital $\omega=\pi$. Entonces, imponiendo la condición de que la transferencia sea unitaria para esa componente, $H(e^{j\omega})\big|_{\omega=\pi}=1$, se puede despejar k

$$H\left(e^{j\pi}\right) = k\frac{1+\sqrt{2}e^{-j\pi}+2e^{-j2\pi}+\sqrt{2}e^{-j3\pi}+e^{-j4\pi}}{e^{-j4\pi}} = k\left(4-2\sqrt{2}\right) = 1 \quad \therefore \quad k = \frac{1}{4-2\sqrt{2}}$$

Ejemplos de simulación

1. Transformada de Fourier de Tiempo Discreto.

1.1. Simular un sistema promediador móvil de longitud L=5, a partir de los coeficientes b y a de la transferencia. Calcular la respuesta al impulso, graficar la transferencia y el diagrama de polos y ceros

$$y[n] = \frac{1}{L}\left(x[n] + x[n-1] + ... + x[n-L+1]\right)$$

Solución:

```
%Programa para el calculo y grafica de la Tz
%Ejemplo de Simulacion 1.: Sistema promediador movil
clc, clear, close all
format long

%Especificaciones
L=5; %longitud del promediador

%Coeficientes de la ecuacion en diferencias del sistema
bn(1:L)=1/L;
an=1;

%Respuesta al impulso del sistema
[hn,n]=impz(bn,an);

%Transferencia y respuesta en frecuencia del sistema
[Hz,Hw,z,w,c,p]=zt(bn,an,0,1);

%Graficos
figure
stem(n,hn,'k.-')
xlabel('n')
ylabel('h[n]')
title('Respuesta al impulso del sistema')

%Grafica de los polos y ceros
figure
zplane(c,p)
title('Diagrama de polos y ceros')
```