práctica

procesamiento digital de señales

1

ejercicios de cálculo, simulación y laboratorio

Universidad Nacional de San Luis

práctica

Ing. Diego Costa

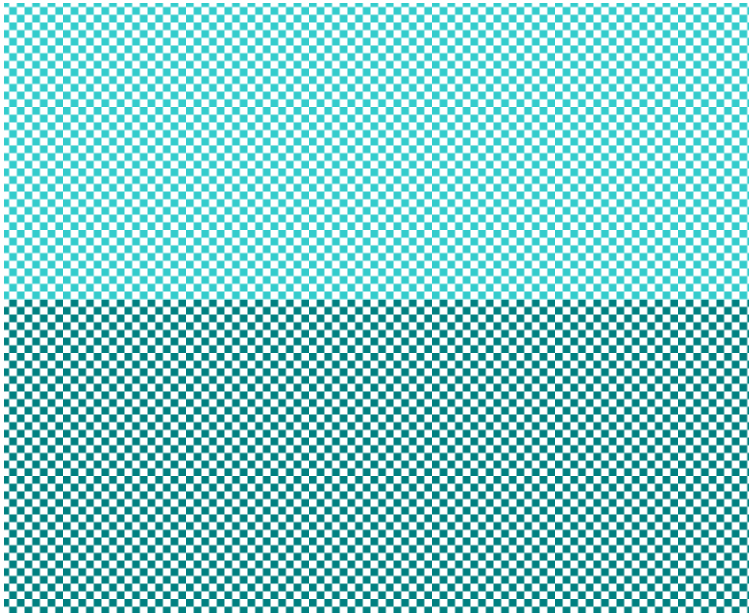
procesamiento digital de señales

1

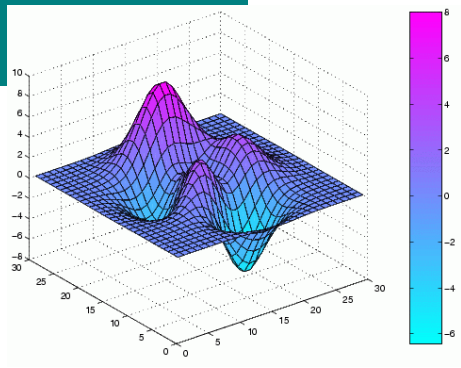
ejercicios de cálculo, simulación y laboratorio

Universidad Nacional de San Luis

práctica



- Transformada Z
- Muestreo y reconstrucción
- Transformada Discreta de Fourier
- Estructura de Filtros
- Filtros FIR
- Filtros IIR



1 transformada z

resumen, ejemplos y ejercicios

Transformada Z

Resumen

Resumen para ejercicios de cálculo

1. Definición.

La Transformada Z de una función real h[n], de variable independiente discreta $n \in N$ es una función compleja H(z) de variable independiente continua $z \in C$ que se define como

$$TZ\{h[n]\} = H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n} \quad ; \quad z \in ROC \Leftrightarrow H(z) = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n} \right| < \infty$$

donde debe tenerse en cuenta el conjunto de valores de z para los cuales converge la sumatoria, llamado región de convergencia ROC (*region of convergence)*.

Dado que z es un número complejo, el mismo puede escribirse en la forma polar $z=r\,e^{j\omega}$ donde $r=|z|$ es el módulo y $\omega=\angle z$ es la fase de dicho número. Así, la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto $H(e^{j\omega})$ de una función real h[n], puede obtenerse evaluando la Transformada Z H(z) en $z=e^{j\omega}$ es decir, en los valores de z cuyo módulo es $|z|=1$. Esto equivale a decir que la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto es un caso particular de la Transformada Z restringida al círculo de radio unitario dentro de todo el plano z.

Antitransformada	Transformada	Región de Convergencia
$\delta[n]$	1	z
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$\cos[\omega_0 n]u[n]$	$\frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$sen[\omega_0 n]u[n]$	$\frac{z^{-1}sen\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n\cos[\omega_0 n]u[n]$	$\frac{1-az^{-1}\cos\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$a^n sen[\omega_0 n]u[n]$	$\frac{az^{-1}sen\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

Tabla 1: Pares de funciones y transformadas Z.

En general, las funciones que surgen de hacer la Transformada Z tienen la forma de expresiones polinómicas racionales, que pueden ser escritas como potencias de z^{-1}

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}$$

Sacando factor común z^{-M}/z^{-N} y normalizando, es decir, dividiendo todos los coeficientes del numerador por b_0 y los del denominador por a_0, estas expresiones pueden ser escritas como potencias de z

$$H(z) = z^{N-M}\frac{b_0}{a_0}\frac{z^M + \frac{b_1}{b_0}z^{M-1} + \ldots + \frac{b_M}{b_0}}{z^N + \frac{a_1}{a_0}z^{N-1} + \ldots + \frac{a_N}{a_0}} = z^{N-M}\frac{b_0}{a_0}\frac{\sum_{k=0}^{M}\overline{b_k}z^{M-k}}{\sum_{k=0}^{N}\overline{a_k}z^{N-k}}$$

donde $\overline{b_k} = \frac{b_k}{b_0}$ y $\overline{a_k} = \frac{a_k}{a_0}$.

Calculando las raíces z_i del numerador y p_i del denominador, la expresión polinómica racional con potencias de z puede escribirse en la forma de polos y ceros

$$H(z) = z^{N-M}\frac{b_0}{a_0}\frac{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2)\ldots(z-p_N)} = z^{N-M}\frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{k=1}^{M}(z-z_k)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)}$$

Distribuyendo el factor común z^{N-M} mediante la multiplicación de z^{-M} por los M factores entre paréntesis del numerador y z^{-N} por los N del denominador se obtiene la expresión polinómica racional con potencias de z^{-1} escrita en la forma de polos y ceros

$$H(z) = \frac{b_0}{a_0}\frac{(1-z_1z^{-1})(1-z_2z^{-1})\ldots(1-z_Mz^{-1})}{(1-p_1z^{-1})(1-p_2z^{-1})\ldots(1-p_Nz^{-1})} = \frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-z_kz^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-p_kz^{-1})}$$

Las raíces del numerador de H(z) se denominan ceros y son los valores donde H(z) se anula. Las raíces del denominador se denominan polos y son los valores donde la función tiende a infinito. Como la Transformada Z es una serie de potencias, los polos representan los valores para los cuales la serie diverge, y por ende, no están incluidos en la región de convergencia de la Transformada Z. En toda expresión racional polinómica, la cantidad de polos triviales y no triviales es igual a la cantidad de ceros triviales y no triviales. Se denominan raíces triviales a los polos y ceros ubicados en $z=0$ o en $z=\infty$.

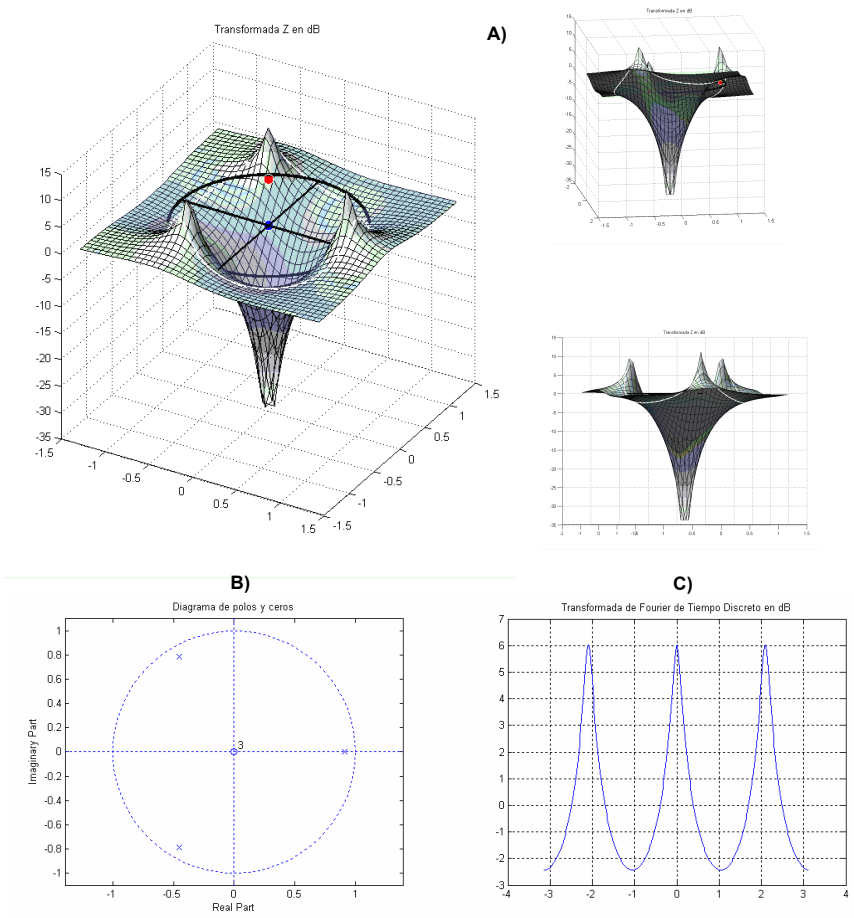


Figura 1: A) Vista superior, inferior y de perfil de la gráfica de una superficie que representa la Transformada Z (en escala semilogarítmica) con 3 polos y un cero. B) Diagrama de polos y ceros. C) Transformada de Fourier de Tiempo Discreto cuya gráfica puede obtenerse intersectando la superficie de la Transformada Z con un cilindro vertical centrado en el origen y de radio unitario.

2. Propiedades.

Las propiedades de la Transformada Z pueden observarse en la tabla siguiente.

Propiedad	Descripción
Linealidad	$c_1x_1[n]+c_2x_2[n]\overset{TZ}{\leftrightarrow}c_1X_1(z)+c_2X_2(z)\ ;\ ROC=ROC_1\cap ROC_2$
Reflexión	$x[-n]\overset{TZ}{\leftrightarrow}X(z^{-1})\ ;\ ROC:\frac{1}{r_{\sup}}<\lvert z\rvert<\frac{1}{r_{\inf}};$
Conjugación	$x^*[n]\overset{TZ}{\leftrightarrow}X^*(z^*)\ ;\ ROC$
Desplazamiento Temporal	$x[n-k]\overset{TZ}{\leftrightarrow}z^{-k}X(z)\ ;\ ROC\vee ROC\not\subset 0\vee ROC\not\subset\infty$
Suma Temporal	$ROC\subset 1\Rightarrow\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\overset{TZ}{\leftrightarrow}\lim_{z\to 1}X(z)$
Convolución	$x_1[n]*x_2[n]\overset{TZ}{\leftrightarrow}X_1(z)X_2(z)\ ;\ ROC=ROC_1\cap ROC_2$
Escalado en el Dominio Z	$a^n x[n]\overset{TZ}{\leftrightarrow}X\left(\frac{z}{a}\right)\ ;\ ROC:\lvert a\rvert r_{\inf}<\lvert z\rvert<\lvert a\rvert r_{\sup}$
Diferenciación en el Dominio Z	$nx[n]\overset{TZ}{\leftrightarrow}-z\frac{\partial X(z)}{\partial z}\ ;\ ROC\vee ROC\not\subset 0\vee ROC\not\subset\infty$
Modulación	$x_1[n]x_2[n]\overset{TZ}{\leftrightarrow}=\frac{1}{j2\pi}\oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$ $\begin{cases} C\ \ contorno\ \ cerrado \\ C\subset ROC\{X_1(z)\}\cap ROC\left\{X_2\left(\frac{1}{z}\right)\right\} \\ C\supset 0\end{cases}$
Correlación	$x_1[n]\otimes x_2[n]\overset{TZ}{\leftrightarrow}X_1(z)X_2(z^{-1})$
Teorema del Valor Inicial	$x[n]=0\forall n<0\Rightarrow x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)$

Tabla 2: Propiedades de la Transformada Z.

3. Antitransformada.

En general, se busca expresar a la función transformada como una suma de términos y valiéndose de la propiedad de la linealidad, obtener la antitransformada de la función como la suma de la antitransformada de cada término, valiéndose de la tabla y de las propiedades.

El caso más sencillo es el de la Antitransformada de funciones polinómicas. Recordando el primer par de la tabla

$$\delta[n] \overset{TZ}{\leftrightarrow} 1$$

Por propiedad de desplazamiento, para un retardo de k instantes de n

$$\delta[n-k] \overset{TZ}{\leftrightarrow} z^{-k}$$

Por propiedad de linealidad

$$b_k\delta[n-k] \overset{TZ}{\leftrightarrow} b_k z^{-k}$$

Por ende, para un polinomio de coeficientes constantes con potencias de z^{-k}

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}$$

puede obtenerse la antitransformada

$$h[n] = b_0\delta[n] + b_1\delta[n-1] + \ldots + b_M\delta[n-M] = \sum_{k=0}^{M} b_k\delta[n-k] = \left\{\underset{\uparrow}{b_0}; b_1; \ldots; b_M\right\}$$

Utilizando las mismas propiedades de linealidad y en este caso de adelanto en lugar de retraso, para un polinomio de coeficientes constantes con potencias de z^{k}

$$H(z) = b_{-L} z^{L} + \ldots + b_{-2} z^{2} + b_{-1} z^{-1}$$

puede obtenerse la antitransformada

$$b_{-L}\delta[n+L] + \ldots + b_{-2}\delta[n+2] + b_{-1}\delta[n+1] = \left\{b_{-L}; \ldots; b_{-2}; b_{-1}; \underset{\uparrow}{0}\right\} = h[n]$$

El caso más general de polinomios con potencias positivas y negativas de z se obtiene combinando los resultados anteriores.

3.1. Expansión en fracciones parciales.

Sea H(z) una expresión polinómica racional con un numerador N(z) y denominador D(z). Asumiendo que a_0=1 (o dividiendo todo por a_0 para normalizar)

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}$$

H(z) puede expandirse como una suma de términos donde cada término es una fracción parcial $H_k(z)$ de la siguiente forma

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} H_k(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \ldots + \frac{A_N}{1 - p_N z^{-1}}$$

Las N constantes A_k son los residuos asociados a cada uno de los N polos p_k.

Si M<N, es decir, si el orden del numerador M es menor al orden del denominador N, la expresión racional H(z) se denomina función propia. En caso contrario, la expresión se denomina función impropia.

Para el caso de una función H(z) propia, multiplicando el numerador y el denominador por z^N se obtiene

$$H(z) = \frac{z^N \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{z^N \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \ldots + b_M z^{N-M}}{z^N + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N}$$

Dividiendo H(z) por z se obtiene

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{b_0 z^{N-1} + b_1 z^{N-2} + \ldots + b_M z^{N-M-1}}{z^N + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N}$$

Si el denominador tiene N raíces diferentes (los polos p_1; p_2; ...; p_N) se deben calcular los residuos A_k asociados a cada polo

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{A_1}{z - p_1} + \ldots + \frac{A_N}{z - p_N} = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{z - p_k}$$

Se puede hallar el valor de cada uno de los N residuos A_i multiplicando la expresión anterior por el factor $(z-p_i)$ y evaluándola en p_i

$$A_i = \lim_{z \to p_i} \frac{H(z)(z-p_i)}{z} = \lim_{z \to p_i} \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{z-p_k}(z-p_i) = \lim_{z \to p_i} \left(\frac{A_1(z-p_i)}{z-p_1} + \ldots + A_i + \ldots + \frac{A_N(z-p_i)}{z-p_N} \right)$$

Componiendo H(z)/z con los residuos y polos calculados, y despejando H(z)

$$H(z) = \frac{zA_1}{z-p_1} + \ldots + \frac{zA_N}{z-p_N} = \sum_{k=1}^{N} \frac{zA_k}{z-p_k} = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1-p_k z^{-1}} = \frac{A_1}{1-p_1 z^{-1}} + \ldots + \frac{A_N}{1-p_N z^{-1}}$$

Luego por simple inspección se puede determinar la antitransformada Z para cada término de la suma. Debe tenerse en cuenta la forma de la ROC para determinar la lateralidad de la secuencia

$$H_k(z) = \frac{A_k}{1-p_k z^{-1}} \overset{TZ}{\leftrightarrow} \begin{cases} h_k[n] = A_k p_k{}^n u[n] & si \quad ROC: \ |p_k| < |z| \\ h_k[n] = -A_k p_k{}^n u[-n-1] & si \quad ROC: \ |z| < |p_k| \end{cases}$$

En el caso de existir un polo p_i de orden múltiple s, en la expansión no sólo aparece el término de orden s, sino que también pueden aparecer los términos de orden menor

$$\sum_{m=1}^{s} \frac{A_{im}}{\left(1-p_i z^{-1}\right)^m} = \frac{A_{i1}}{1-p_i z^{-1}} + \frac{A_{i2}}{\left(1-p_i z^{-1}\right)^2} + \ldots + \frac{A_{is}}{\left(1-p_i z^{-1}\right)^s}$$

Para un polo p_i de orden s, el residuo del término de orden m se obtiene de forma similar a un polo simple pero derivando la expresión s-m veces. Por inspección se determina la transformada para cada término generado por un polo de orden múltiple. Por ejemplo, para un polo p_k de orden s=2, el término de segundo orden correspondiente al residuo A_{k2} puede antitransformarse utilizando la propiedad de la derivada en z

$$H_{k2}(z) = \frac{A_{k2} p_k z^{-1}}{\left(1-p_k z^{-1}\right)^2} \quad ; \quad ROC: |p_k| < |z| \overset{TZ}{\leftrightarrow} h_{k2}[n] = A_{k2} n p_k{}^n u[n]$$

Si M≥N, la expresión racional polinómica N(z)/D(z) es una función impropia y puede expresarse como la suma de un polinomio C(z) y una función propia R(z)/D(z). El polinomio C(z) es el cociente que se obtiene dividendo el numerador N(z) por el denominador D(z) hasta que el resto R(z) tenga un orden menor que el divisor D(z).

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = C(z) + \frac{R(z)}{D(z)} = c_0 + c_1 z^{-1} + \ldots + c_M z^{-(M-N)} + \frac{r_0 + r_1 z^{-1} + \ldots + r_{(N-1)} z^{-(N-1)}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}$$

$$H(z) = \sum_{k=o}^{N-M} c_k z^{-k} + \frac{\sum_{k=0}^{N-1} r_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

La división de los polinomios se hace ordenándolos en potencias decrecientes de z^{-1}

$$\begin{array}{l|l} -\ b_M z^{-M} + \ldots + b_2 z^{-2} + b_1 z^{-1} + b_0 & a_M z^{-N} + \ldots + a_3 z^{-3} + a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1} + a_0 \\ \hline \quad b_M z^{-M} + \ldots + d_2 z^{-2} + d_1 z^{-1} + d_0 & c_{M-N} z^{N-M} + \ldots + c_1 z^{-1} + c_0 \\ \hline \qquad -\ e_2 z^{-2} + e_1 z^{-1} + \ldots & \\ \qquad\quad e_2 z^{-2} + f_1 z^{-1} + \ldots & \\ \hline \qquad\qquad \vdots & \end{array}$$

La antitransformada de la función propia se obtiene como se procedió anteriormente, y por inspección se determina la antitransformada del polinomio C(z) término a término

$$C(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + \ldots + c_M z^{-(M-N)} \overset{TZ}{\leftrightarrow} c[n] = c_0 \delta[n] + c_1 \delta[n-1] + \ldots + c_{M-N} \delta[n-(M-N)]$$

Si como resultado de la división R(z)=0 entonces h[n] es una secuencia con una cantidad finita de valores y H(z) es simplemente un polinomio.

3.4. Series de potencias.

Cualquier función matemática H(v) puede desarrollarse mediante su serie de potencias. Para ello, se calculan las derivadas de H(v) y se evalúan en v=0

$$H(v)\Big|_{v=0} \quad H'(v)\Big|_{v=0} \quad H''(v)_{v=0} \quad \ldots \quad H^{(n)}(v)_{v=0} \quad \Rightarrow \quad H(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^{(n)}(0) v^n}{n!}$$

Puede tomarse v como una variable auxiliar $v=z^{-1}$. Desarrollando la serie de potencias y observando la similitud de sus términos con los de la definición de Transformada Z, por inspección se puede determinar la antitransformada

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^{(n)}(0) z^{-n}}{n!} = H(0) + H'(0) z^{-1} + \frac{H''(0)}{2} z^{-2} + \ldots + \frac{H^{(n)}(0)}{n!} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n} \overset{TZ}{\leftrightarrow} h[n]$$

Cada factor que multiplica a las potencias de z es un valor de la secuencia h[n].

$$\therefore h[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{H(0)}; H'(0); \frac{H''(0)}{2}; \ldots; \frac{H^{(n)}(0)}{n!} \right\}$$

6. Análisis de señales y sistemas: Sistemas FIR e IIR.

Un sistema de N retardos de la entrada, sin realimentación de la salida tiene una transferencia H(z) de posee forma de polinomio de grado N (no hay términos de la forma $a_k y[n-k]$). Factorizando H(z) puede observarse que tiene N ceros no triviales y un polo trivial en z=0, es decir que la ROC es todo el plano z excepto z=0. Estos sistemas producen respuestas impulsivas h[n] que tienen un número finito de valores, es decir que la respuesta está limitada en el tiempo. Por eso se llaman sistemas de respuesta finita al impulso (*FIR, Finite Impulse Response*). También son denominados promediadores móviles. La relación entre los coeficientes de la transferencia (o de la ecuación en diferencias) y los valores de la respuesta al impulso es inmediata en los FIR causales.

$$h[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{h[0]}; h[1]; \ldots; h[M] \right\} \overset{TZ}{\leftrightarrow} H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}$$

$$\therefore h[0] = b_0 \quad ; \quad h[1] = b_1 \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad h[M] = b_M$$

Un sistema de N retardos de la entrada y M realimentaciones de la salida tiene una transferencia H(z) de posee forma de de expresión racional polinómica. Factorizando H(z) puede observarse que tiene M polos no triviales además de N ceros no triviales, y un cero trivial de grado N-M en z=0, es decir que la ROC es el exterior de una circunferencia, por la existencia de polos. Estos sistemas producen respuestas impulsivas h[n] que tienen un número infinito de valores. Por eso, se los llama sistemas de respuesta infinita al impulso (*IIR,Infinite Impulse Response).* Cuando solamente tienen polos (no hay términos de la forma $b_k x[n-k]$) son denominados auto-regresivos. Cuando tienen polos y ceros se los llama promediadores móviles auto-regresivos. La relación entre los coeficientes de la transferencia y los valores de la respuesta al impulso no es inmediata en los IIR.

FIR	IIR
MA (Promediador Móvil) $H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = \frac{1}{z^M} \sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k}$ M ceros no triviales 1 polo de orden M en z=0	AR (Auto-regresivo) $H(z) = \frac{b_0}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{b_0 z^N}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}}$ N polos no triviales 1 cero de orden N en z=0
	ARMA (Promediador Móvil Auto-regresivo) $H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = z^{N-M} \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}}$ M ceros no triviales y N polos no triviales 1 cero de orden N-M en z=0

Tabla 7: Tipos de sistemas y transferencias.

7. Análisis de señales y sistemas: Causalidad y estabilidad.

Dado que la Transformada Z surge de realizar una serie de potencias, las condiciones para que la serie converja definen la forma de la ROC. Como puede observarse en los ejemplos de cálculo para secuencias exponenciales, el tipo de lateralidad de la secuencia determina la forma que adquiere la ROC de su Transformada Z. Una secuencia unilateral a derecha tiene una Transformada Z cuya ROC es el exterior a una circunferencia. Por ejemplo, la respuesta al impulso de un sistema causal es unilateral derecha y la transferencia de un sistema de ese tipo tiene una ROC exterior a una circunferencia. Además, si el sistema causal mencionado es un FIR, o sea, tiene una respuesta al impulso de duración finita, la transferencia tiene sólo un polo trivial en z=0, por lo cual, su ROC es todo el plano z excepto z=0, es decir, la ROC es el exterior de una circunferencia de radio nulo.

Por el contrario, una secuencia unilateral a izquierda tiene una Transformada Z cuya ROC tiene forma de círculo. Como ejemplo, puede citarse la respuesta al impulso de un sistema anticausal cuya transferencia tiene una ROC de esa forma. Si el sistema anticausal es FIR, la transferencia tiene una ROC igual a todo el plano z con excepción de z=∞, o sea que la ROC es un círculo de radio infinito.

Y una secuencia bilateral genera una transformada Z cuya ROC es un anillo. Este es el caso de la respuesta al impulso de un sistema no causal. Si el sistema no causal es FIR, la ROC de la transferencia es la intersección de las mencionadas previamente, comprendiendo a todo el plano z excepto z=0 y z=∞. Esa ROC es un anillo de radio infinito.

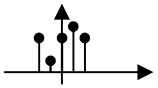
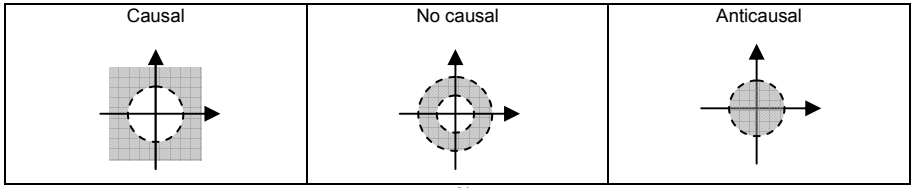
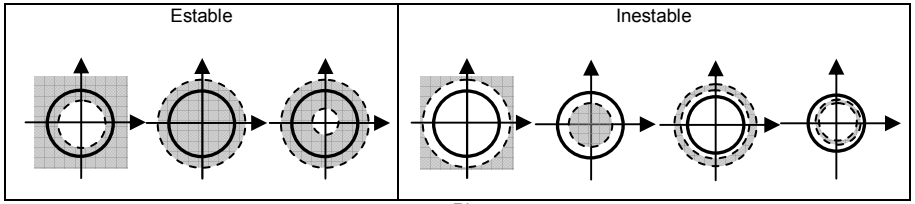
Secuencia infinita	ROC	Secuencia finita	ROC
Unilateral Derecha	Exterior circunferencia	Unilateral Derecha	Todo el plano excepto z=0
Bilateral	Anillo	 Bilateral	Todo el plano excepto z=0 y z=∞
Unilateral izquierda	Interior circunferencia	Unilateral izquierda	Todo el plano excepto z=∞

Tabla 5: Relación entre lateralidad de las funciones y forma de la ROC.

La estabilidad de un sistema puede analizarse observando si la ROC incluye a la circunferencia de radio unitario. Un sistema causal (en el que los polos de su transferencia son internos a un círculo) es estable si los polos de su transferencia son internos al círculo unitario.



A)



B)

Tabla 6: Formas de la ROC de una transferencia según las características del sistema. A) Causalidad, B) Estabilidad.

6. Análisis de señales y sistemas: Respuesta natural, respuesta forzada y condiciones iniciales.

Sea un sistema caracterizado por una función de transferencia que puede expresarse como el cociente de dos polinomios numerador y denominador

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)} \quad con \quad polos \quad p_k \quad k=0;1;...;N$$

Si al sistema se le aplica una señal de entrada lateral derecha cuya transformada puede escribirse también como un cociente

$$X(z)=\frac{N(z)}{Q(z)} \quad con \quad polos \quad q_k \quad k=0;1;...;N$$

Supóngase que no hay cancelaciones entre los polos y los ceros de uno u otro polinomio, tampoco entre los ceros de uno de los polinomios con los ceros del otro, ni entre los polos de uno de los polinomios con los polos del otro.

El efecto de todas las entradas aplicadas en los instantes anteriores se reflejan en los valores de las salidas previas, que son las condiciones iniciales y[-1], y[-2], … y[-N]

Partiendo de la ecuación en diferencias del sistema

$$y[n]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]-\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

Aplicando la Transformada Z unilateral a dicha ecuación, como la señal es lateral derecha tiene x[n]=0 $\forall n<0$, por lo que $X(z)=X^+(z)$

$$Y^+(z)=\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\left[Y^+(z)+\sum_{n=1}^{k} y[-n]z^n\right]$$

Despejando $Y^+(z)$

$$Y^+(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} X(z)-\frac{\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\sum_{n=1}^{k} y[-n]z^n}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

La expresión polinómica racional del primer término es la transferencia del sistema. Como el sistema es causal, $H(z)=H^+(z)$

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

En el segundo término aparecen expresadas las condiciones iniciales y[-1], …, y[-N]. Llamando $N_0(z)$ al numerador, puede observarse que el denominador del segundo término es el denominador de H(z). De esta forma, la ecuación puede escribirse como

$$Y^+(z)=H(z)X(z)+\frac{N_0(z)}{A(z)}=\frac{B(z)}{A(z)}\frac{N(z)}{Q(z)}+\frac{N_0(z)}{A(z)}$$

Realizando la expansión en fracciones parciales en función de los polos p_k raíces del polinomio A(z) y q_k raíces del polinomio Q(z)

$$Y^{+}(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-p_k z^{-1}}+\sum_{k=1}^{L}\frac{Q_k}{1-q_k z^{-1}}+\sum_{k=1}^{N}\frac{D_k}{1-p_k z^{-1}}$$

Aparecen claramente tres partes diferenciadas. La primera parte y la segunda son, respectivamente, la Transformada Z de la respuesta natural y la respuesta forzada del sistema en estado nulo, es decir, cuando las condiciones iniciales son nulas. La tercera parte, es la Transformada Z de la respuesta del sistema con condiciones iniciales no nulas, es decir, a entrada nula.

La Transformada Z de la respuesta natural y la respuesta forzada del sistema en estado nulo es

$$Y^{+}{}_{zs}(z)=H(z)X(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-p_k z^{-1}}+\sum_{k=1}^{L}\frac{Q_k}{1-q_k z^{-1}}$$

Antitransformando término a término, se obtiene la respuesta natural y la respuesta forzada del sistema en estado nulo

$$y_{zs}[n]=\sum_{k=1}^{N}A_k p_k{}^n u[n]+\sum_{k=1}^{L}Q_k q_k{}^n u[n]$$

La Transformada Z de la respuesta natural a entrada nula es

$$Y_{zi}{}^{+}(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{D_k}{1-p_k z^{-1}}$$

Antitransformando término a término, se obtiene la respuesta natural del sistema a entrada nula

$$y_{zi}[n]=\sum_{k=1}^{N}D_k p_k{}^n u[n]$$

El sistema, a través de los polos p_k de su transferencia H(z) determina la salida natural. El reflejo de la señal de entrada en esta parte de la salida se da a través de los residuos A_k que ponderan a dichos polos.

Considerando conjuntamente el aporte del sistema y de las condiciones iniciales a la respuesta natural pueden agruparse los residuos asociados a cada polo p_k del sistema

$$Y_{nr}{}^{+}(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k+D_k}{1-p_k z^{-1}}$$

Las condiciones iniciales no agregan polos al sistema. El efecto que tienen es alterar la respuesta natural modificando los factores que ponderan el peso de los polos del sistema que pasan de ser A_k cuando las condiciones iniciales son nulas, a A_k+D_k con condiciones iniciales no nulas.

$$y_{nr}[n]=\sum_{k=1}^{N}(A_k+D_k)p_k{}^n u[n]$$

Si $|p_k|<1\ \forall k$, la respuesta natural $y_{nr}[n]$ decae a cero a medida que crece n. En este caso, la respuesta natural se denomina respuesta transitoria, y el decaimiento es más rápido cuanto más cerca se encuentran los polos del origen z=0.

La respuesta forzada del sistema está determinada por los polos q_k de la Transformada Z de la señal de entrada. El reflejo del sistema en esta parte de la salida se da a través de los residuos Q_k

$$Y^{+}{}_{fr}(z)=\sum_{k=1}^{L}\frac{Q_k}{1-q_k z^{-1}}$$

La respuesta forzada del sistema es

$$y_{fr}[n]=\sum_{k=1}^{L}Q_k q_k{}^n u[n]$$

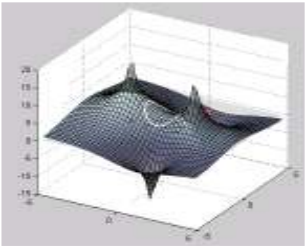
Si la entrada x[n] es sinusoidal, su transformada tendrá polos $|q_k|=1$ y la respuesta forzada $y_{nr}[n]$ persistirá para todo n. En este caso, la respuesta forzada se denomina respuesta en régimen permanente.

Ayuda para ejercicios de simulación

zt

Computa y grafica la Transformada Z en dB de una transferencia

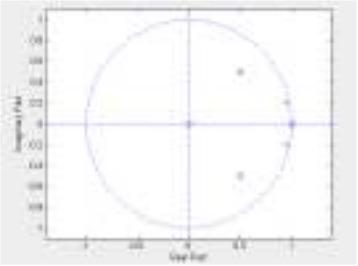
Sintaxis	Ejemplos

[Hz,Hw,z,w,c,p]=zt(b,a,f,graficar)
 	
▪ **a** y **b**: si f=0 son coeficientes del denominador y numerador o si f=1 de polos y ceros
▪ **f**: naturaleza de a y b (por defecto f=0)
▪ **graficar**: no plotea si graficar=0, plotea si graficar=1 (por defecto graficar=0)
▪ **Hz**: vector de TZ
▪ length{Re{Hz}} = length{Im{Hz}} = 256
▪ **Hw**: vector de TF para $-\pi \leq \omega < \pi$
▪ length{Hw} = 256
▪ **z** y **w**: vector del argumento z y ω
▪ **c** y **p**: polos y ceros de Hz
	`a=[1+3i 1-3i];b=[-2 2];f=1;`
	`[Hz,Hw,z,w,p,c]=zt(a,b,f,1);`
	 

zplane

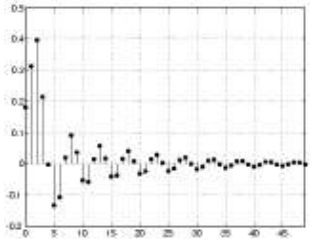
Grafica el mapa de polos y ceros en el plano Z

Sintaxis	Ejemplos

`zplane[z,p]`
`zplane[b,a]`
 	
• **z** y **p**: ceros y polos de la transferencia
• **b** y **a**: coeficientes de ecuación en diferencias
	`z=[0;1;.5+.5j;.5-.5j];`
	`p=[.95+.2j;.95-.2j];`
	`zplane(z,p)`
	 

impz

Computa la respuesta al impulso a partir de una transferencia

Sintaxis	Ejemplos

`[h,t] = impz(b,a,n,fs)`
`impz(b,a,n,fs)`
 	
• **b** y **a**: coeficientes de ecuación en diferencias
• **n**: escalar o vector de rango
  • t = 0:n-1 o t = 0, n_1, n_2, ...n
• **fs**: frecuencia de muestreo
  • t = 0:1/fs:n-1
 	
Algoritmo
 	
`filter(b,a,[1 zeros(1,n-1)]`
	[b,a] = ellip(4,0.5,20,0.4);
	`impz(b,a,50)`